Journal of Vectorial Relativity
JVR **4** (2009) **3** 49-54

Transformaciones Ortogonales vía Cuaterniones

J L López Bonilla[1], A Rangel-Merino[2] y A Sebastián-Pérez[3]

***RESUMEN**.-* Se estudia cómo generar matrices ortogonales 4x4 mediante un triple producto cuaterniónico, lo cual conduce de manera natural a las matrices de Dirac y al estudio de rotaciones en 3 y 4 dimensiones.

***PALABRAS CLAVES*:** Cuaterniones; Matrices de Dirac; Rotaciones Espaciales; Transformaciones de Lorentz.

I. INTRODUCCIÓN

Las unidades cuaterniónicas obedecen el álgebra [1-6]:

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -1, \quad \mathbf{IJK} = -1, \tag{1}$$

que permiten realizar el producto:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{pF}, \tag{2.a}$$

con

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{I} + F_2\mathbf{J} + F_3\mathbf{K} + F_4, \tag{2.b}$$

$$\mathbf{p} = p_1\mathbf{I} + p_2\mathbf{J} + p_3\mathbf{K} + p_4, \tag{2.c}$$

y la expresión resultante para $\tilde{\mathbf{F}}$ puede escribirse matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \\ p_3 & p_4 & -p_1 & p_2 \\ -p_2 & p_1 & p_4 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_4 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{P}} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

El cuadrado de la magnitud de $\mathbf{F}$ está definido por:

$$|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F}\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}\mathbf{F} = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2, \tag{4.a}$$

con

$$\overline{\mathbf{F}} = -F_1\mathbf{I} - F_2\mathbf{J} - F_3\mathbf{K} + F_4, \tag{4.b}$$

notando que para $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios:

[1, 2, 3] SEPI-ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, Anexo Edif. 3, Col. Lindavista, CP 07738 México DF
E-mail: jlopezb@ipn.mx

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{B}}\,\overline{\mathbf{A}}\ . \tag{4.c}$$

Entonces de (2.a, 3, 4.a,c):

$$\left|\tilde{\mathbf{F}}\right|^2 = \mathbf{p}\left|\mathbf{F}\right|^2 \overline{\mathbf{p}} = \mathbf{p}\overline{\mathbf{p}}\left|\mathbf{F}\right|^2, \quad \det \underset{\sim}{\mathrm{P}} = \left(\mathbf{p}\overline{\mathbf{p}}\right)^2, \tag{5.a}$$

en donde es evidente que para $\mathbf{p}$ unitario:

$$\mathbf{p}\overline{\mathbf{p}} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1, \quad \det \underset{\sim}{\mathrm{P}} = 1, \tag{5.b}$$

se conserva la magnitud de $\mathbf{F}$:

$$\tilde{F}_1^2 + \tilde{F}_2^2 + \tilde{F}_3^2 + \tilde{F}_4^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2, \tag{6}$$

equivalente a:

$$\left(\tilde{F}_1\ \tilde{F}_2\ \tilde{F}_3\ \tilde{F}_4\right)\begin{pmatrix}\tilde{F}_1\\ \tilde{F}_2\\ \tilde{F}_3\\ \tilde{F}_4\end{pmatrix} = \left(F_1\ F_2\ F_3\ F_4\right)\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{pmatrix},$$

que en unión de (3) implica el carácter ortogonal de la transformación:

$$\underset{\sim}{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}\mathrm{P} = \underset{\sim}{\mathrm{I}}_{4\times 4}\ . \tag{7}$$

Una matriz es ortogonal cuando da la identidad al multiplicarse por su transpuesta, y su principal virtud es que conserva la magnitud de los vectores bajo su acción.

Similarmente, el producto:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{q}, \tag{8.a}$$

tiene la representación matricial:

$$\begin{pmatrix}\tilde{F}_1\\ \tilde{F}_2\\ \tilde{F}_3\\ \tilde{F}_4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{pmatrix}}_{\underset{\sim}{\mathrm{Q}}}\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{pmatrix}, \tag{8.b}$$

y si $\mathbf{q}$ es unitario entonces se verifica (6) y por lo tanto $\underset{\sim}{\mathrm{Q}}$ es ortogonal con $\det \underset{\sim}{\mathrm{Q}} = 1$.

Los casos (2.a, 8.a) pueden unificarse en un solo esquema mediante un triple producto cuaterniónico:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{pFq}\ , \tag{9.a}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{\mathrm{D}}_{4\times 4} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{\mathrm{D}} = \underset{\sim}{\mathrm{P}}\, \underset{\sim}{\mathrm{Q}}, \tag{9.b}$$

entonces $\left|\tilde{\mathbf{F}}\right|^2 = (\mathbf{p}\overline{\mathbf{p}})(\mathbf{q}\overline{\mathbf{q}})\left|\mathbf{F}\right|^2$ y así es claro que (6) se satisface para $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ unitarios, con $\underset{\sim}{\mathrm{P}}$ y $\underset{\sim}{\mathrm{Q}}$ ortogonales implicando que $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ también lo es:

$$\underset{\sim}{\mathrm{D}}^{\mathrm{T}} \underset{\sim}{\mathrm{D}} = \underset{\sim}{\mathrm{I}}, \quad \det \underset{\sim}{\mathrm{D}} = 1\,. \tag{9.c}$$

En las siguientes páginas se realizan las aplicaciones de (9.a.b.c): La Sec. 2 muestra que $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ reproduce las 16 matrices de Dirac [7] si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ coinciden con las unidades cuaterniónicas. La Sec. 3 considera el caso de relatividad especial porque $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ genera transformaciones de Lorentz cuando $\mathbf{q} = \overline{\mathbf{p}}^*$. La Sec. 4 se dedica a rotaciones tridimensionales al pedir que el cuaternión unitario $\mathbf{p}$ sea real ($\mathbf{p} = \overline{\mathbf{p}}^*$), y en consecuencia $\mathbf{q} = \overline{\mathbf{p}}$.

II. MATRICES DE DIRAC

En mecánica cuántica relativista son importantes las 16 matrices de Dirac [7]:

$$\underset{\sim}{\mathrm{I}}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \text{-}\mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \text{-}\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_r \\ -\sigma_r & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^r\gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & -\sigma_r \end{pmatrix}, \quad \sigma^{0r} = -\sigma^{r0} = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_r \\ \sigma_r & 0 \end{pmatrix}, \quad r = 1,2,3\,, \tag{10}$$

$\sigma^{jk} = -\sigma^{kj} = \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix}$, (jkl) es una permutación cíclica de (123),

y las σ_j son las matrices de Pauli [7,8]:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}\,. \tag{11}$$

Ahora en (9.a) pueden seleccionarse a $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ como las unidades cuaterniónicas, por ejemplo, si $\mathbf{p} = 1$, $\mathbf{q} = \mathbf{K}$, entonces de (9.b) obtenemos que $\underset{\sim}{\mathrm{D}} = i\sigma^{31}$. En forma análoga, si $\mathbf{p} = \mathbf{I}$, $\mathbf{q} = \mathbf{J}$ resulta que $\underset{\sim}{\mathrm{D}} = -\gamma^1\gamma^5$, etc. Así se origina la Tabla:

$\mathbf{p}\backslash\mathbf{q}$	1	$\mathbf{I}$	$\mathbf{J}$	$\mathbf{K}$
1	$\underset{\sim}{I}$	γ^1	$-\gamma^3$	$i\sigma^{31}$
$\mathbf{I}$	σ^{02}	$-\gamma^3\gamma^5$	$-\gamma^1\gamma^5$	$-\gamma^5$
$\mathbf{J}$	$\gamma^0\gamma^5$	σ^{32}	σ^{12}	$i\gamma^2$
$\mathbf{K}$	$-i\gamma^2\gamma^5$	$i\sigma^{03}$	$i\sigma^{01}$	γ^0

(12)

Si $\underset{\sim}{W}$ denota a cualesquiera de las matrices de esta Tabla, entonces es simple probar que:

$$\underset{\sim}{W}^{-1}=\underset{\sim}{W}^{T}, \quad \underset{\sim}{W}^{*}=\underset{\sim}{W}, \quad \underset{\sim}{W}^{T}=\pm\underset{\sim}{W}, \tag{13}$$

es decir, son ortogonales, reales y simétricas ó antisimétricas.

III. TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

En el espacio de Minkowski [9] las transformaciones de Lorentz relacionan, linealmente, a las coordenadas de un evento visto desde dos marcos de referencia en movimiento relativo uniforme (*c* es la velocidad de la luz en el vacío):

$$\begin{pmatrix} i\tilde{x} \\ i\tilde{y} \\ i\tilde{z} \\ c\tilde{t} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{D} \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \\ ct \end{pmatrix}, \tag{14.a}$$

que en términos geométricos corresponde a una rotación 4-dimensional manteniendo intacta la magnitud del vector:

$$\left(c\tilde{t}\right)^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = \left(ct\right)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \,, \tag{14.b}$$

lo cual es exigido por los postulados de la relatividad especial.

Si el cuaternión (2.b) es seleccionado como:

$$\mathbf{F} = ix\mathbf{I} + iy\mathbf{J} + iz\mathbf{K} + ct \,, \tag{15}$$

entonces (6) y (9.b) reproducen (14.b) y (14.a), respectivamente, y (9.a) da:

$$i\tilde{x}\mathbf{I} + i\tilde{y}\mathbf{J} + i\tilde{z}\mathbf{K} + c\tilde{t} = \mathbf{p}\left(ix\mathbf{I} + iy\mathbf{J} + iz\mathbf{K} + ct\right)\mathbf{q} \tag{16.a}$$

y al aplicarle la operación $*$:

$$-i\tilde{x}\mathbf{I} - i\tilde{y}\mathbf{J} - i\tilde{z}\mathbf{K} + c\tilde{t} = \mathbf{p}^*\left(-ix\mathbf{I} - iy\mathbf{J} - iz\mathbf{K} + ct\right)\mathbf{q}^* \,,$$

que a su vez bajo la operación – implica [recuérdese (4.b,c)]:

$$i\tilde{x}\mathbf{I} + i\tilde{y}\mathbf{J} + i\tilde{z}\mathbf{K} + c\tilde{t} = \overline{\mathbf{q}}^{*}\left(ix\mathbf{I} + iy\mathbf{J} + iz\mathbf{K} + ct\right)\overline{\mathbf{p}}^{*} \qquad (16.b)$$

así la igualdad entre (16.a) y (16.b) se logra si $\overline{\mathbf{q}}^* = \mathbf{p}$, es decir:

$$\mathbf{q} = \overline{\mathbf{p}}^*, \qquad (17)$$

siendo $\mathbf{p}$ unitario. Por lo tanto, (9.a) adquiere la estructura [9-13]:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{pF}\overline{\mathbf{p}}^*, \quad \mathbf{p}\overline{\mathbf{p}} = 1, \qquad (18)$$

que en unión de (15) permite generar transformaciones de Lorentz propias y homogéneas verificando (9.c), basta con dar $\mathbf{p}$. En efecto, al sustituir (2.c, 15) en (18), entonces con (14.a) recuperamos las expresiones para $\underset{\sim}{D}$ existentes en la literatura [4, 12-15]. Por ejemplo, si elegimos:

$$\mathbf{p} = -i\,senh\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathbf{K} + cosh\left(\frac{\tau}{2}\right), \ \tau \text{ real}, \qquad (19.a)$$

resultan las conocidas fórmulas de Lorentz:

$$\begin{gathered} \tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = \gamma\left(z - vt\right), \quad \tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right) \\ \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad tanh\left(\tau\right) = \frac{v}{c} < 1 \end{gathered} \qquad (19.b)$$

para dos observadores moviéndose en la dirección z con velocidad relativa v

IV. ROTACIONES ESPACIALES

Aquí se consideran transformaciones de Lorentz que no alteran la coordenada temporal:

$$\tilde{t} = t, \qquad (20)$$

lo cual corresponde a rotaciones tridimensionales. Si en (16.a) sustituímos (20) es claro que t puede eliminarse idénticamente (para así solo dejar variables espaciales) si $\mathbf{pq} = 1$, que en virtud de (17) da $\mathbf{p}\overline{\mathbf{p}}^* = 1$, equivalente a $\mathbf{p}^*\overline{\mathbf{p}} = 1$ que para ser compatible con (5.b) impone la condición:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* \qquad (21)$$

es decir, las matrices de Lorentz generan 3-rotaciones cuando en (9.a) se emplea $\mathbf{p}$ unitario y real. Entonces (14.a) adopta la expresión:

$$\begin{pmatrix} i\tilde{x} \\ i\tilde{y} \\ i\tilde{z} \\ c\tilde{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \underset{\sim}{R}_{3\times3} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \\ ct \end{pmatrix},$$

implicando (20) y:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{R}\underset{\sim}{R}^{T} = \underset{\sim}{I}, \quad \det \underset{\sim}{R} = 1, \qquad (22.a)$$

respetándose la invariancia (14.b) en la forma pitagórica $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Con (9.a, 17, 21) es inmediato obtener la estructura de la $\underset{\sim}{R}$ reportada en la literatura [13]:

$$\underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} 1-2\left(p_2^2 + p_3^2\right) & 2\left(p_1 p_2 - p_3 p_4\right) & 2\left(p_1 p_3 + p_2 p_4\right) \\ 2\left(p_1 p_2 + p_3 p_4\right) & 1-2\left(p_1^2 + p_3^2\right) & 2\left(p_2 p_3 - p_1 p_4\right) \\ 2\left(p_1 p_3 - p_2 p_4\right) & 2\left(p_1 p_4 + p_2 p_3\right) & 1-2\left(p_1^2 + p_2^2\right) \end{pmatrix}, \qquad (22.b)$$

teniéndose así, con(22.a, b), un proceso sistemático para producir rotaciones espaciales, basta con dar un cuarteto de valores reales p_j cumpliendo (5.b).

REFERENCIAS

[1] J. Kronsbein , "*Kinematics-quaternions-spinors-and Pauli's spin matrices*", Am. J. Phys. 35, No.4 (1967) 335-342.

[2] B. L. van der Waerden, "*Hamilton's discovery of quaternions*", Math. Mag. 49, No.5 (1976) 227-234.

[3] L. Byron McAllister, "*A quick introduction to quaternions*", Pi Mu Epsilon J. 9, No.1 (1989) 23-25.

[4] R. Penrose, "*The road to reality*", Jonathan Cape, London (2004).

[5] N. Hamdan, I. Guerrero M., J. López-Bonilla and L. Rosales R., "*On the Faraday's complex vector*", The Icfai Univ. J. Phys. 1, No.3 (2008) 52-56.

[6] G. Martínez-Sierra and P. F. Benoit-Poirier, "*Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial*", Lat. Am. J. Phys. Educ. 2, No.2 (2008) 201-208.

[7] J. Leite-Lopes, "*Introduction to quantum electrodynamics*", Ed. Trillas, Mexico (1970).

[8] W. Pauli, "*Uber das wasserstoffspektrum vom standpunkt der neuen quantenmechanik*", Zeits. für Physik 37 (1926) 263-277.

[9] J. L. Synge, "*Relativity: the special theory*", North-Holland Pub., Amsterdan (1965).

[10] C. Lanczos, "*The variational principles of mechanics*", University of Toronto Press (1970).

[11] S. De Leo, "*Quaternions and special relativity*", J. Math. Phys. 37, No.6 (1996) 2955-2968.

[12] M. Acevedo, J. López-Bonilla and M. Sánchez, "*Quaternions, Maxwell equations and Lorentz transformations*", Apeiron 12, No.4 (2005) 371-384.

[13] I. Guerrero M., J. López-Bonilla and L. Rosales R., "*Rotations in three and four dimensions via 2x2 complex matrices and quaternions*", The Icfai Univ. J. Phys. 1, No.2 (2008) 7-13.

[14] J. López-Bonilla, J. Morales and G. Ovando, "*On the homogeneous Lorentz transformation*", Bull. Allahabad Math. Soc. 17 (2002) 53-58.

[15] B.E. Carvajal-Gámez, M. Galaz L. and J. López-Bonilla, "*On the Lorentz matrix in terms of Infeld-van der Waerden symbols*", Scientia Magna 3, No.3 (2007) 56-57.