

Tensor de Faraday: su Estructura Algebraica

J L López-Bonilla¹, R Meneses-G² y M Turgut³

RESUMEN.- Se estudia tensorialmente el problema de eigenvalores de la matriz de Faraday.

PALABRAS CLAVE: Ecuaciones de Maxwell; Tensor de Faraday.

I. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (c es la velocidad de la luz en el vacío):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad (1.a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \quad (1.b)$$

adoptan la forma tensorial [1,2]:

$$F_{ab,j} + F_{ja,b} + F_{bj,a} = 0 \quad , \quad (2.a)$$

$$F^a_{b,a} = 0 \quad , \quad (2.b)$$

en donde se acepta la convención de Einstein de suma sobre índices repetidos, con:

$$(x^j) = (ct, x, y, z) \quad \mathcal{L} \quad , \quad r = \frac{\partial}{\partial x^r} \quad , \quad (3)$$

Con la métrica de Minkowski(1, -1, -1, -1) y la matriz de Faraday en sus representaciones:

$$(F^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & E_X & E_Y & E_Z \\ -E_X & 0 & cB_Z & -cB_Y \\ -E_Y & -cB_Z & 0 & cB_X \\ -E_Z & cB_Y & -cB_X & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (F_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_X & -E_Y & -E_Z \\ E_X & 0 & cB_Z & -cB_Y \\ E_Y & -cB_Z & 0 & cB_X \\ E_Z & cB_Y & -cB_X & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (4.a)$$

^{1, 2} SEPI-ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, Col. Lindavista, CP 07738 México DF
 E-mail: jlopezb@ipn.mx

³ Department of Mathematics, Buca Educational Faculty, Dokuz Eylül University, 35 160 Buca-Izmir, Turkey
 E-mail: melih.turgut@ogr.deu.edu.tr

$$\tilde{F} \equiv (F^a{}_b) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4.b}$$

Las expresiones (2.a) y (2.b) reproducen (1.a) y (1.b), respectivamente.

Nótese que si en (1.a) se realizan los cambios:

$$\vec{E} \rightarrow c\vec{B}, \quad c\vec{B} \rightarrow -\vec{E}, \tag{5}$$

entonces resulta (1.b), y al emplear (5) en (1.b) se obtiene (1.a), lo cual motiva la introducción de las matrices Duales :

$$(*F^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & cB_x & cB_y & cB_z \\ -cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ -cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ -cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (*F_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ cB_x & 0 & -E_z & E_y \\ cB_y & E_z & 0 & -E_x \\ cB_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.a}$$

$$*\tilde{F} \equiv (*F^a{}_b) = \begin{pmatrix} 0 & -cB_x & -cB_y & -cB_z \\ -cB_x & 0 & -E_z & -E_y \\ -cB_y & -E_z & 0 & -cB_x \\ -cB_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \tag{6.b}$$

generadas al utilizar (5) en (4), y que permiten reescribir a las ecuaciones de Maxwell (2):

$$*F^a{}_{b,a} = 0, \tag{7.a}$$

$$*F_{ab,j} + *F_{ja,b} + *F_{bj,a} = 0 \tag{7.b}$$

La introducción del tensor totalmente antisimétrico de Levi – Civita:

$$\eta^{abpq} = \epsilon^{abpq}, \quad \eta_{abpq} = -\epsilon_{abpq} \tag{8.a}$$

con los símbolos:

$$\epsilon^{abpq} = \epsilon_{abpq} = \begin{cases} 1, & \text{si } (abpq) \text{ es permutación par de } (0123), \\ -1, & \text{si } (abpq) \text{ es permutación impar de } (0123), \\ 0, & \text{en los demás casos,} \end{cases} \tag{8.b}$$

permite relacionar al tensor antisimétrico de Faraday con su Dual:

$${}^*F^{ab} = \frac{1}{2} \eta^{abpq} F_{pq} \quad , \quad (9.a)$$

o bien

$$F^{ab} = -\frac{1}{2} \eta^{abpq} {}^*F_{pq} \quad , \quad (9.b)$$

mostrando así que (6) también pueden construirse mediante (4,9.a), es decir, (9.a) es la representación tensorial del intercambio (5). Con (9.a) es inmediato probar que (7.a) y (7.b) implican (2.a) y (2.b), respectivamente.

Con (4,6) es sencillo determinar los únicos dos invariantes de Lorentz del campo electromagnético [1,2]:

$$\begin{aligned} I_1 &= F^{ab} F_{ab} = 2(c^2 B^2 - E^2) \quad , \\ I_2 &= {}^*F^{ab} F_{ab} = -4c \vec{B} \bullet \vec{E} \end{aligned} \quad (10)$$

El vector complejo de Faraday [3]:

$$\vec{F} = c\vec{B} + i\vec{E} \quad , \quad (11)$$

al multiplicarse consigo mismo conduce a los mencionados invariantes:

$$\vec{F} \bullet \vec{F} = \frac{1}{2} (I_1 - iI_2) \quad , \quad (12.a)$$

y además aporta otra manera de expresar a las ecuaciones de Maxwell (1):

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{F} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \quad (12.b)$$

Aquí se estudiará el problema de eigenvalores de (4.b) mediante el formalismo tensorial.

II. TENSOR DE FARADAY

La técnica tensorial aplicada al análisis de los valores y vectores propios de (4.b) se apoya en la ecuación:

$$F_b^a \xi^b = \lambda \xi^a \quad , \quad (13)$$

la cual tiene solución sólo para los λ verificando:

$$\det(\tilde{F} - \lambda \tilde{I}) = 0 \quad , \quad (14.a)$$

generándose así la ecuación característica [4-6] :

$$\lambda^4 + \frac{I_1}{2} \lambda^2 - \frac{I_2^2}{16} = 0 \tag{14.b}$$

En esta etapa es conveniente introducir la clasificación de Piña [7]- Synge [8] para \tilde{F} :

$$\begin{aligned} \text{Tipo A: } & I_2 \neq 0 \text{ ,} \\ \text{Tipo B: } & I_2 = 0 \text{ , } I_1 < 0 \text{ ,} \\ \text{Tipo C: } & I_2 = 0 \text{ , } I_1 = 0 \text{ (Caso Nulo)} \\ \text{Tipo D: } & I_2 = 0 \text{ , } I_1 > 0 \text{ ,} \end{aligned} \tag{15}$$

de particular relevancia en el estudio del movimiento de cargas puntuales bajo la acción de un campo electromagnético constante [7-10].

Las raíces de (14.b) se presentan de acuerdo al esquema:

Tipo A.- Dos valores propios reales y dos imaginarios:

$$\pm \frac{1}{2} \left[-I_1 + \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ , } \pm \frac{i}{2} \left[I_1 + \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{16.a}$$

Tipo B.- Se tienen cuatro eigenvalores reales:

$$\lambda_1 = -I_1 \text{ , } \lambda_2 = I_1 \text{ , } \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \tag{16.b}$$

Tipo C.- Colapsan los valores propios:

$$\lambda_j = 0 \text{ , } j = 1, \dots, 4 \tag{16.c}$$

Tipo D.- Resultan dos eigenvalores imaginarios y dos reales:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ , } \lambda_3 = iI_1 \text{ , } \lambda_4 = -iI_1 \tag{16.d}$$

El tipo A es el principal interés de este trabajo, con $\lambda \neq 0$ real para así asegurar que el correspondiente ξ^r en (13) sea un eigenvector real en el espacio de Minkowski, entonces:

$$\lambda \xi^r \xi_r = F^{ab} \xi_a \xi_b \equiv 0 \text{ [porque } F^{ab} \text{ es antisimétrico] ,} \tag{17.a}$$

y como $\lambda \neq 0$ se concluye que ξ^r es un vector nulo:

$$\xi^r \xi_r = (\xi^0)^2 - (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 0 \text{ ,} \tag{17.b}$$

lo cual significa que ξ^j está sobre el cono de luz con vértice en el evento en cuestión. Por lo tanto, de acuerdo a (16.a) se tienen dos eigenvectores nulos linealmente independientes:

$$F_b^a \sigma^a = \lambda \sigma^a \quad , \quad F_b^a \eta^b = -\lambda \eta^a \quad , \quad (18.a)$$

$$\sigma^r \sigma_r = \eta^r \eta_r = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{1}{2} \left[-I_1 + \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (18.b)$$

y sin pérdida de generalidad son seleccionados tales que:

$$\sigma^a \eta_a = 1 \quad (18.c)$$

En Algebra Lineal [4] se conoce que una matriz puede reconstruirse a partir de sus valores y vectores propios, que en el caso del tensor de Faraday queda explícito con la relación [1]:

$$F_{ab} = \lambda (\sigma_a \eta_b - \sigma_b \eta_a) + \tau \eta_{abqr} \sigma^q \eta^r \quad , \quad (19.a)$$

en donde τ tiene el mismo signo que I_2 :

$$\tau = \frac{\epsilon}{2} \left[I_1 + \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \epsilon I_2 > 0 \quad , \quad \epsilon = \pm 1 \quad (19.b)$$

Con (18.b,c,19.a) son inmediatas las expresiones (18.a), pero además el uso de (19.a) en (9.a) muestra que el tensor Dual es generado vía:

$$*F_{ab} = -\tau (\sigma_a \eta_b - \sigma_b \eta_a) + \lambda \eta_{abqr} \sigma^q \eta^r \quad , \quad (20.a)$$

con los mismos eigenvectores pero asociados a distintos valores propios:

$$*F_b^a \sigma^b = -\tau \sigma^a \quad , \quad *F_b^a \eta^b = \tau \eta^a \quad (20.b)$$

En [11-14] se ilustran (18.a,19.a) para el campo electromagnético de Liénard – Wiechert [2].

Las expresiones (19.a,20.a) permiten demostrar identidades algebraicas para la matriz de Faraday y su Dual [7,15,16] :

$$*F^{ab} F_{br} = -\frac{I_2}{4} \delta_r^a \quad , \quad (21.a)$$

$$F^{ab} F_{rb} - *F^{ab} *F_{rb} = \frac{I_1}{2} \delta_r^a \quad , \quad (21.b)$$

$$F_{rb} F^{bq} F_{qa} = \frac{I_1}{2} F_{ar} + \frac{I_2}{4} *F_{ar} \quad , \quad (21.c)$$

que también pueden deducirse mediante las representaciones (4.a, 6.a). Las relaciones (21) son básicas al determinar las trayectorias de partículas cargadas en un campo electromagnético uniforme [7-10,15]. De (21.a) es inmediato que:

$$\tilde{F}^{-1} = -\frac{4}{I_2} * \tilde{F} \quad , \quad I_2 \neq 0 \quad , \quad (22.a)$$

es decir, la matriz Dual proporciona la inversa de \tilde{F} cuando $I_2 \neq 0$, lo cual hace sospechar que este invariante esté relacionado con el determinante de \tilde{F} , en efecto, la ecuación característica (14.b) implica [5,6]:

$$\det \tilde{F} = -\frac{I_2^2}{16} = -(c\vec{B} \bullet \vec{E})^2 \quad , \quad (22.b)$$

entonces existe \tilde{F}^{-1} en los puntos donde \vec{B} no es ortogonal a \vec{E} . De (21.a, c) resulta la identidad:

$$\tilde{F}^4 + \frac{I_1}{2} \tilde{F}^2 - \frac{I_2^2}{16} \tilde{I} = \tilde{0} \quad , \quad (23)$$

que es precisamente el Teorema de Cayley – Hamilton [4] asegurando que \tilde{F} satisface la ecuación característica (14.b).

El tipo C indicado en (15) corresponde a un campo electromagnético nulo lo cual es:

$$I_1 = I_2 = 0 \quad , \quad (24)$$

y por (16.c) sólo se tiene el eigenvalor cero:

$$F_b^a K^b = 0 \quad , \quad (25.a)$$

Puede demostrarse [1,17] que K^r es nulo y que también es eigenvector del tensor Dual:

$$*F_b^a K^b = 0 \quad , \quad (25.b)$$

lo cual equivale a:

$$F_{ab} K_r + F_{br} K_a + F_{ra} K_b = 0 \quad (25.c)$$

La reconstrucción de \tilde{F} se logra mediante la expresión [1,17] :

$$F_{ab} = K_a Z_b - K_b Z_a \quad , \quad *F_{ab} = \eta_{abpq} K^p Z^q \quad , \quad (25.d)$$

$$K_r Z^r = 0 \quad , \quad Z^r Z_r = -1 \quad ,$$

en donde el vector tipo-espacio unitario Z^r no es único, en efecto, es claro que en (25.d) a Z^r puede sumársele βK^r , con β arbitrario, sin que se alteren dichas relaciones.

Con (21,24) resultan las siguientes identidades válidas para toda \tilde{F} tipo C:

$${}^* \tilde{F} \tilde{F} = \tilde{0} \quad , \quad {}^* F^2 = F^2 \quad , \quad \tilde{F}^3 = \tilde{0} \quad , \tag{26}$$

también demostrables con (25.d).

El vector nulo real K^b es una Dirección Principal Nula de \tilde{F} tipo C porque verifica las propiedades (25.a, b):

$$W_{ab} K^b = 0 \quad , \tag{27.a}$$

con el tensor antisimétrico complejo:

$$W_{ab} = F_{ab} + i {}^* F_{ab} \quad , \quad i = \sqrt{-1} \tag{27.b}$$

Los vectores σ^a y η^a , para el tipo A, son Direcciones Principales Nulas de \tilde{F} porque no satisfacen (27.a) pero sí cumplen con [17]:

| | |
|--|--------|
| $(\xi_r W_{ab} - \xi_a W_{rb}) \xi^b = 0 \quad , \quad \xi^r = \sigma^r \text{ y } \eta^r \quad ,$ | (27.c) |
|--|--------|

lo cual es inmediato de (18,19,20).

Enfatizamos que en (25.a,b) el vector nulo K^b es único (excepto por un factor de escala) porque no existen dos eigenvectores nulos, linealmente independientes, para el valor propio cero. Además, una vez seleccionado Z^r en (25.d), también es único el vector propio Y^r unitario y tipo – espacio:

$$F_b^a Y^b = 0 \quad , \quad Y^r Z_r = Y^r K_r = 0 \quad , \quad Y^r Y_r = -1 \quad , \tag{28.a}$$

que permite escribir al tensor Dual en la forma:

$${}^* F_{ab} = K_a Y_b - K_b Y_a \quad , \tag{28.b}$$

de donde es inmediato que Z^r es un eigenvector tipo – espacio de ${}^* \tilde{F}$, pero no de \tilde{F} :

$${}^* F_b^a Z^b = 0 \quad F_b^a Z^b = -K^a \tag{28.c}$$

Este trabajo está principalmente dedicado al tensor de Faraday, sin embargo, es interesante realizar una aplicación al tensor de energía - momento de Maxwell definido por [1,2,18] (excepto por un factor dependiente de las unidades empleadas):

$$T^{ab} = -F^{ar} F_r^b + \frac{I_1}{4} g^{ab} \quad , \quad (29.a)$$

el cual es simétrico debido a la equivalencia relativista entre masa y energía, y con traza nula por que es cero la masa en reposo del fotón:

$$T^{ab} = T^{ba} \quad , \quad T^a_a = 0 \quad (29.b)$$

Entonces para el tipo A se multiplica (29.a) por σ_b y η_b , y se utilizan (18.a), así resulta que dichos vectores propios de \tilde{F} y $^* \tilde{F}$ también lo son del tensor de Maxwell con el mismo eigenvalor:

$$T^a_b \xi^b = \frac{1}{2} (\lambda^2 + \tau^2) \xi^a \quad , \quad \xi^r = \sigma^r \text{ y } \eta^r \quad , \quad (30.a)$$

y en virtud de (18.b, 19.b) son válidas las relaciones:

$$\tau^2 - \lambda^2 = \frac{I_1}{2} \quad , \quad \lambda \tau = \frac{I_2}{4} \quad , \quad \lambda^2 + \tau^2 = \frac{1}{2} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \quad (30.b)$$

Al emplear (18.c, 19.a, 30.b) en (29.a) se obtiene a T^{ab} en términos de sus eigenvectores nulos y de la métrica de Minkowski $g^{ab} = \text{Diag}(1,-1,-1,-1)$:

$$T^{ab} = (\lambda^2 + \tau^2) \left(\sigma^a \eta^b + \sigma^b \eta^a - \frac{1}{2} g^{ab} \right) \quad (30.c)$$

Para el tipo C la sustitución de (24,25.d) en (29.a) conduce al tensor de Maxwell de carácter radiativo:

$$T^{ab} = K^a K^b \quad , \quad (31.a)$$

que en unión de (25.d,28.a) permite mostrar sus vectores propios:

$$T^a_b K^b = T^a_b Z^b = T^a_b Y^b = 0 \quad (31.b)$$

De (30.c,31.a) son evidentes las propiedades (29.b), y también las importantes Condiciones de Rainich [19-22]:

$$T^{ab} T_{rb} = \frac{1}{4} (T^{mn} T_{mn}) \delta^a_r \quad , \quad (32.a)$$

en donde:

$$T^{mn}T_{mn} = (\lambda^2 + \tau^2)^2 = \frac{1}{4}(I_1^2 + I_2^2) \tag{32.b}$$

Es muy interesante hacer notar que un cambio de fase en el vector complejo de Faraday (11):

$$c\tilde{\vec{B}} + i\tilde{\vec{E}} = e^{i\xi}(c\vec{B} + i\vec{E}), \tag{33.a}$$

es equivalente a las Rotaciones de Dualidad [16,19, 20, 23, 24] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\vec{E}} \\ c\tilde{\vec{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & \text{sen} \xi \\ -\text{sen} \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix}, \tag{33.b}$$

induce la misma rotación en las matrices \tilde{F} y $*\tilde{F}$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}^{ab} \\ *\tilde{F}^{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & \text{sen} \xi \\ -\text{sen} \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{ab} \\ *F^{ab} \end{pmatrix}, \tag{33.c}$$

pero una rotación de ángulo doble en los invariantes (10):

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}_1 \\ \tilde{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\xi) & \text{sen}(2\xi) \\ -\text{sen}(2\xi) & \cos(2\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{33.d}$$

Sí ahora empleamos (33.c, d) en (29.a) resulta el notable hecho de que el tensor de Maxwell es invariante ante Rotaciones de Dualidad:

$$\tilde{T}^{ab} = T^{ab}, \tag{34.a}$$

y como este tensor se relaciona con la energía y el momento electromagnéticos, por lo tanto es natural sospechar que la invariancia (34.a) éste asociada a una ley de conservación, y en efecto, como las ecuaciones (1) son deducibles de un principio variacional [25] entonces mediante el Teorema de Noether [25-27] para las transformaciones (33.a) puede obtenerse la ecuación de continuidad [18]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right) = 0, \tag{34.b}$$

entre el vector de Poynting y la densidad de energía electromagnética.

III. CONCLUSIÓN

Lo aquí realizado muestra que el estudio de la estructura del tensor de Faraday aporta una mejor comprensión del campo de Maxwell.

REFERENCIAS

- [1] J. L. Synge, *Relativity: The special theory*, North Holland Pub., Amsterdam (1965)
- [2] García O., R. Linares, J. López-Bonilla and A. Rangel M., *Electron. J. Theor. Phys.* 5, No.18 (2008) 1-20
- [3] N. Hamdan, I. Guerrero M, J. López-Bonilla and L. Rosales R., *The Icfai Univ. J. Phys.* 1, No.3 (2008) 52-56
- [4] D. T. Finkbeiner, *Introduction to matrices and linear transformations*, W.H. Freeman, San Francisco, USA (1966)
- [5] J. López-Bonilla, J. Morales, G. Ovando and E. Ramírez, *Proc. Pakistan Acad. Sci.* 43, No.1 (2006) 47-50
- [6] J. H. Caltenco, J. López-Bonilla and R. Peña, *Aligarh Bull. Math.* 19 (2000) 55-59
- [7] E. Piña, *Rev. Mex. Fis.* 16 (1967) 233
- [8] J. L. Synge, *Proc. R. Irish Acad.* A65 (1967) 27-41
- [9] J. H. Caltenco, J. López-Bonilla and R. Peña, *Indian J. Theor. Phys.* 52, No.3 (2004) 179-183
- [10] J. H. Caltenco, J. López-Bonilla and R. Peña, *Nepali Math. Sci. Report* 21, Nos.1-2 (2003) 31-38
- [11] V. Gaftoi, J. López-Bonilla and G. Ovando, *Aligarh Bull. Math.* 17 (1977-98) 59-62
- [12] G. Arreaga, J. López-Bonilla and G. Ovando, *Indian J. Pure Appl. Math.* 31, No.1 (2000) 85-91
- [13] V. Gaftoi, J. López-Bonilla and G. Ovando, *Canad. J. Phys.* 79, No.1 (2001) 75-80
- [14] F. Felipe D., J. López-Bonilla and I. Toledo, *Galilean Electrodynamics* 19, No.5 (2008) 82
- [15] J. Plebański, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl.* 9 (1961) 587 and 593
- [16] R. Penney, *J. Math. Phys.* 5, No.10 (1964) 1431-1437
- [17] A. Schild, *Relativity theory and astrophysics. I, Lectures in Applied Mathematics vol. 8*, Ed. J. Ehlers, Am. Math. Soc. (1967) 1-104
- [18] A. López-Dávalos and D. Zanette, *Fundamentals of electromagnetism*, Springer – Verlag, Berlín (1999)
- [19] G. Y. Rainich, *Trans. Amer. Math Soc.* 27 (1925) 106-136
- [20] J. A. Wheeler, *Geometrodynamics*, Academic Press, NY (1962)
- [21] D. Lovelock, *Gen. Rel. Grav.* 4, No.2 (1973) 149-159
- [22] J. H. Caltenco, J. López-Bonilla and R. Peña, *Prog. Phys.* 3 (2007) 34-35
- [23] C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Ann. of Phys.* 2, No.6 (1957) 525-603
- [24] G. F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fis.* 43, No.1 (1997) 25-32
- [25] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press (1970)
- [26] E. Noether, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 2 (1918) 235-257
- [27] C. Lanczos, *Bull. Inst. Math. & Appl.* 9, No.8 (1971) 253-258