JVR

Journal of Vectorial Relativity
JVR **4** (2009) **3** 142-146

Sobre las Condiciones de Fueter-Lanczos

J L López-Bonilla [1], F J Gallegos-Funes [2] y B E Carvajal-Gámez [3].

RESUMEN.- Mostramos que las ecuaciones de Maxwell en el vacío y la ecuación de Dirac sin el término de masa son casos especiales de las Condiciones de Fueter-Lanczos.

PALABRAS CLAVES: Cuaterniones, Ecuaciones de Maxwell, Ecuación de Dirac.

I. INTRODUCCIÓN

En [1] p.453 encontramos que las Condiciones de Cauchy-Riemann [2] pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0\,,\, i=\sqrt{-1} \qquad (1)$$

Recordemos que en variable compleja una función analítica (derivable) f(z) = u + i v debe satisfacer (1), que a su vez implica el carácter armónico de las partes real e imaginaria de f(z), es decir, u & v cumplen con la ec. de Euler (1752)-Laplace (1787) bidimensional, lo cual tiene gran importancia física porque permite la aplicación del Mapeo Conformal [2,3] a inumerables problemas de electrostática, hidrodinámica, termostática, etc., gobernados por dicha ec. de Euler-Laplace. Además, en [4] se utilizó (1) para demostrar que u & v son auto-potenciales de Debye, en otras palabras, los famosos potenciales de Debye [5-9] del campo electromagnético pueden motivarse mediante las Condiciones de Cauchy-Riemann de variable compleja. Al multiplicar z por exp (ib) hacemos que z rote por un ángulo b en el plano de Argand, entonces es inmediato preguntarse si existe un sistema de números que permita generar rotaciones en tres (nuestro espacio Euclideano) y cuatro (espacio-tiempo de Minkowski) dimensiones, en efecto, tal sistema corresponde a los Cuaterniones descubiertos por Hamilton el 16 Octubre 1843 [10-14]. El proceso cuaterniónico para producir 3-rotaciones y transformaciones de Lorentz puede consultarse en [15-21].

Como ya se mencionó, la relación compleja (1) tiene impacto en diversas aplicaciones físicas, así es natural buscar su correspondiente generalización cuaterniónica. Por eso es relevante que Lanczos [1] haya escrito las Condiciones de Cauchy-Riemann en la forma (1), porque así es inmediata su extensión vía cuaterniones:

$$\nabla\, G = 0 \qquad (2)$$

[1] Mechanical and Electrical Engineering Higher School,Edif. Z-4, 3er. Piso, Col. Lindavista CP 07738, México DF Septiembre, 2009
jlopezb@ipn.mx

[2, 3] National Polytechnic Institute of Mexico. Professional Unit Interdisciplinary Engineering and Advanced Technologies. Laboratory of Electronics North, becarvajalg@gmail.com

donde:

$$\nabla = I\,\frac{\partial}{\partial x_1} + J\,\frac{\partial}{\partial x_2} + K\,\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \qquad , \tag{3.a}$$

$$G = I\,u_1 + J\,u_2 + K\,u_3 + u_4 \tag{3.b}$$

Al sustituir (3.a,b) en (2) resultan las Condiciones de Fueter [22]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = 0 \qquad ,\\
&\frac{\partial u_4}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_4} = 0 \qquad ,\\
-&\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = 0 \qquad ,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_4} = 0 \qquad ,
\end{aligned} \tag{4}$$

y fue Lanczos [1] ecs. (21.a) el primero en deducirlas. Notemos que en variable compleja las relaciones (1) tienen conexión con la derivabilidad de la función u + i v, sin embargo, en variable cuaterniónica las expresiones de Fueter-Lanczos (4) deben interpretarse como Condiciones de Regularidad [23] de (3.b). Al igual que (1), las restricciones (4) pueden escribirse [19,24] en la forma de Debye, y esto hace sospechar una conexión entre (4) y las ecs. de Maxwell, lo cual se estudia en la Sec. 2. De hecho, Imaeda [23] muestra que las Condiciones de Fueter-Lanczos permiten una nueva formulación de la electrodinámica clásica. Hemos comentado que la búsqueda de técnicas para producir rotaciones en tres y cuatro dimensiones conduce a los Cuaterniones, y en consecuencia a las relaciones de Fueter-Lanczos, y lo sorprendente es que (4) se encadena a otros tipos de rotaciones (o de momentos angulares): En la Sec. 2 hace acto de presencia el vector de Faraday [15,25] cuya existencia se debe a que las ecs. de Maxwell en el vacío son invariantes bajo Rotaciones de Dualidad [9,15,19,25-29], y dicho vector da la pauta para seleccionar la función (3.b) tal que (2) dé las ecs. de Maxwell en el espacio libre; además, en la Sec. 3 aparece otro tipo de rotación, a saber, el espín del electrón, porque otra elección de (3.b) hace que (2) [o equivalentemente (4)] coincida con la ec. de Dirac para espín 1/2 [30] sin el término de masa. Así es admirable la riqueza rotacional del formalismo cuaterniónico. De hecho, Lanczos [1,31-33] hizo un profundo análisis de la ec. de Dirac empleando cuaterniones, lo cual también le permitió obtener la ec. de Proca-Kemmer para espín 1 [34,35] y el concepto de Isoespín. En [36] puede encontrarse un interesante estudio histórico de la ec. de Dirac.

En resumen, en las Secs. 2 y 3 particularizamos (3.b) para exhibir que (4) contiene a las ecs. de Maxwell en el vacío y a la ec. de Dirac sin el término de masa, respectivamente. Señalemos que en la obtención de (4) se emplearon las conocidas reglas de multiplicación para las unidades cuaterniónicas [20,21]:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \qquad IJK = -1 \tag{5}$$

II. ECUACIONES DE MAXWELL SIN FUENTES

En el espacio libre el campo electromagnético está gobernado por las ecuaciones diferenciales [c denota la velocidad de la luz en el vacío]:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \quad , \qquad \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \quad ,$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{6}$$

para los 3-vectores eléctrico y magnético. Si ahora elegimos:

$$x_1 = x \;,\; x_2 = y \;,\; x_3 = z \;,\; x_4 = -ict \quad , \tag{7}$$

y

$$u_1 = cB_x + iE_x \;,\; u_2 = cB_y + iE_y \quad ,$$
$$u_3 = cB_z + iE_z \;,\; u_4 = 0 \quad , \tag{8}$$

entonces las relaciones (4) reproducen (6). Es decir, las ecuaciones de Maxwell en el vacío adoptan la expresión (2) [25,37]:

$$\nabla F = 0 \quad , \tag{9}$$

donde

$$\nabla = I\frac{\partial}{\partial x} + J\frac{\partial}{\partial y} + K\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} \;, \tag{10.a}$$

$$F = IF_x + JF_y + KF_z \;, \quad \vec{F} = c\vec{B} + i\vec{E} \tag{10.b}$$

Lanczos [1,38] y Silberstein [39] fueron los primeros en deducir (9). En (10.b) participa el vector complejo de Faraday [15,19,25] porque el sistema (6) es invariante bajo Rotaciones de Dualidad. Es interesante mencionar que la expresión cuaterniónica (9) permite deducir, de manera muy natural, la forma espinorial de las ecs. de Maxwell, véase [25], lo cual es realizable gracias al isomorfismo existente [19,40] entre las unidades cuaterniónicas y las matrices de Pauli [41].

III. ECUACIÓN DE DIRAC

Aquí consideramos las Condiciones de Fueter-Lanczos para (7) con:

$$u_1 = \overline{\psi}_2 + \psi_2 + \overline{\psi}_4 - \psi_4 \,, u_2 = i\left(\overline{\psi}_2 - \psi_2 + \overline{\psi}_4 + \psi_4\right),$$
$$u_3 = \overline{\psi}_1 + \psi_1 + \overline{\psi}_3 - \psi_3 \,, u_4 = i\left(\overline{\psi}_1 - \psi_1 + \overline{\psi}_3 + \psi_3\right), \qquad (11)$$

y al sustituir (7,11) en (4) encontramos el sistema de ecuaciones diferenciales que deben satisfacer las funciones ψ_j :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_4 + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = 0 \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_3 - \frac{\partial \psi_4}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = 0 \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_3}{\partial t} = 0 \quad , \qquad (12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_1 - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi_4}{\partial t} = 0 \quad ,$$

equivalente a la ecuación de Dirac para espín $\frac{1}{2}$ sin el término de masa [30,36,42], la cual adquiere la forma (2) :

$$\nabla D = 0 \quad , \qquad (13)$$

con ∇ y D dados por (10.a) y (3.b,11), respectivamente. Las expresiones (9) y (13) exhiben una notable similitud, en estructura, entre las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de Dirac, hecho mostrado por Lanczos [1,38], Darwin [43] y Rainich [44]. Otro aspecto notable del formalismo cuaterniónico es que permite construir [16,45], de manera simple y directa, las 16 matrices 4x4 de Dirac de la mecánica cuántica relativista [42].

Las relaciones (4) también tienen participación en relatividad general: Lanczos [46] mostró que en todo espacio-tiempo curvo el tensor conformal de Weyl es generado por un potencial de tercer orden, que bautizó con el nombre de Espíntensor porque al estudiarlo en campos gravitacionales débiles obtuvo (13), y él siempre admitió la esperanza de que su potencial fuera útil en la cuantización de la gravedad.

IV. CONCLUSIÓN

Lo aquí efectuado enfatiza la importancia, en Física, de las condiciones de Fueter-Lanczos.

REFERENCIAS

[1] C. Lanczos, *Zeits. für Physik* 57 (1929) 447-473
[2] R. V. Churchill, *Complex variables and applications*, McGraw-Hill, NY (1960)
[3] Z. Nehari, *Conformal mapping*, Dover, NY (1975)
[4] J. H. Caltenco, J. López-Bonilla and J. Sosa, *Galilean Electrodynamics* 18, No.2 (2007) 31
[5] P. Debye, *Ann. der Phys.* 30 (1909) 57
[6] W. B. Campbell and T. Morgan, *Physica* 53, No.2 (1971) 264-288
[7] C. G. Gray, *Am. J. Phys*. 46, No.2 (1978) 169-179
[8] A. C. T. Wu, *Phys. Rev.* D34 (1986) 3109-3110
[9] G. F. Torres del Castillo, *Rev. Mex. Fís*. 43, No.1 (1997) 25-32
[10] W. R. Hamilton, *Phil. Mag*. 25 (1844) 489-495
[11] C. Lanczos, *Am. Scientist* 55, No.2 (1967) 129-143
[12] B. L. van der Waerden, *Math. Mag.* 49, No.5 (1976) 227-234
[13] L. Byron McAllister, *Pi Mu Epsilon Jour*. 9, No.1 (1989) 23-25
[14] R. Penrose, *The road to reality*, Jonathan Cape, London (2004)
[15] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press (1970)
[16] J. L. Synge, *Comm. Dublin Inst. Adv. Stud. Ser. A*, No.21 (1972)
[17] S. De Leo, *J. Math. Phys*. 37, No.6 (1996) 2955-2968
[18] J. López-Bonilla, J. Morales and G. Ovando, *Indian J. Theor. Phys.* 52, No.2 (2004) 91-96
[19] M. Acevedo, J. López-Bonilla and M. Sánchez, *Apeiron* 12, No.4 (2005) 371-384
[20] I. Guerrero, J. López-Bonilla and L. Rosales, *The Icfai Univ. J. Phys*. 1, No.2 (2008) 7-13
[21] B. Carvajal-Gámez, I. Guerrero and J. López-Bonilla, *JVR* 4, No.2 (2009) 82-85
[22] R. Fueter, *Comm. Math. Helv*. 4 (1932) 9-20
[23] K. Imaeda, *Nuovo Cim.* B32, No.1 (1976) 138-162
[24] V. Gaftoi, J. López-Bonilla and G. Ovando, *Indian J. Theor. Phys.* 52, No.1 (2004) 1-4
[25] N. Hamdan, I. Guerrero, J. López-Bonilla and L. Rosales, *The Icfai Univ J. Phys.* 1, No.3 (2008) 52-56
[26] G. Y. Rainich, *Trans. Amer. Math. Soc.* 27 (1925) 106-136
[27] C. W. Misner and J.A. Wheeler, *Ann. of Phys*. 2, No.6 (1957) 525-603
[28] J. A. Wheeler, *Geometrodynamics,* Academic Press, NY (1962)
[29] R. Penney, *J. Math. Phys*. 5, No.10 (1964) 1431-1437
[30] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. London* A117 (1928) 610-624 and A118 (1928) 351-361
[31] C. Lanczos, *Zeits. für Physik* 57 (1929) 474-483 and 484-493
[32] C. Lanczos, *Physikalische Zeits*. 31 (1930) 120-130
[33] J. R. McConnell, C. Lanczos *Collected Works*, vol. III, North Carolina State Univ., USA (1998)
[34] A. Proca, *J. Phys. Radium* 7 (1936) 347-353 and 9 (1938) 61-66
[35] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. London* A173 (1939) 91-116
[36] H. Kragh, *Arch. Hist. Exact Sci*. 24, No.1 (1981) 31-67
[37] J. López-Bonilla, G. Ovando and R. Peña, *Indian J. Theor. Phys.* 51, No.1 (2003) 85-88
[38] G. Marx, Lecture at the C. Lanczos *Int. Centenary Conf.*, Raleigh N.C. USA, Dec. (1993)
[39] L. Silberstein, *Theory of relativity*, Macmillan, London (1924)
[40] J. Kronsbein, *Am. J. Phys*. 35, No.4 (1967) 335-342
[41] W. Pauli, *Zeits. für Physik* 37 (1926) 263-277
[42] J. Leite-Lopes, *Introduction to quantum electrodynamics*, Ed. Trillas, Mexico city (1970)
[43] C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc. London* A120 (1928) 621-631 and Nature 123 (1929) 203
[44] G.Y. Rainich, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 27 (1941) 355-358
[45] J. López-Bonilla, L. Rosales and A. Zúñiga-Segundo, *J. Sci. Res. (India)* 53 (2009) 253-255
[46] C. Lanczos, *Rev. Mod. Phys.* 34 (1962) 379-389