JVR

Journal of Vectorial Relativity
JVR **4** (2009) **3** 133-136

Letter

Sobre los Polinomios de Daubechies

B E Carvajal-Gámez [1], F J Gallegos-Funes[2] and J L López-Bonilla[3].

RESUMEN.- Demostramos que con pequeños cambios en diversas expresiones para los polinomios de Legendre modificados, podemos obtener las correspondientes relaciones para los polinomios de Daubechies.

PALABRAS CLAVE: Polinomios de Legendre modificados; Polinomios de Daubechies

I. INTRODUCCIÓN

Las wavelets son muy importantes en ciencia, ingeniería y tecnología [1-3], en particular, la construcción de las wavelets de Daubechies [4] depende fuertemente de las raíces de los polinomios d_l de Daubechies [5]. Así, es interesante estudiar las propiedades de esos polinomios porque su comportamiento nos da información útil sobre las correspondientes wavelets. De acuerdo a este enfoque, aquí demostramos que el análisis de d_l puede ser guiado mediante los polinomios de Legendre modificados P_l* [6-8], por lo tanto, un mejor entendimiento de los polinomios de Daubechies puede lograrse vía las funciones de Legendre.

II. POLINOMIOS DE LEGENDRE MODIFICADOS

En efecto, los polinomios de Legendre modificados [6-8], para $x \in [0,1]$:

$$P_0^* = 1, \qquad P_1^* = 1-2x, \quad P_2^* = 1-6x+6x^2, \quad p_3^* = 1-12x+30x^2-20x^3, \tag{1}$$

$$P_4^* = 1-20x+90x^2-140x^3+70x^4$$

$$P_5^* = 1-30x+210x^2-560x^3+630x^4-252x^5, \text{ etc.}$$

son soluciones de la ecuación diferencial:

$$x(1-x)y''-(2x-1)y'+l(l+1)y=0 \tag{2}$$

y pueden ser generados con la expresión:

$$P_l^*(x) = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k \binom{l}{k}\binom{l+k}{k}x^k, \tag{3}$$

o en términos de la function hipergeométrica de Gauss [7,8]:

[1] Instituto Politécnico Nacional. Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Tecnología Avanzada Laboratorio de Electrónica Norte, becarvajalg@gmail.com

Septiembre, 2009

[2, 3] Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, IPN, Edif. Z-4, 3er. Piso, Col. Lindavista CP 07738, México DF. fgallegosf@ipn.mx; jlopezb@ipn.mx

$$P_l^*(x) = {}_2F_1(-l, l+1; 1; x) \tag{4}$$

III. SIMILARIDADES ENTRE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE MODIFICADOS Y LOS POLINOMIOS DE DAUBECHIES

Hacemos un cambio de signo en el 2do. coeficiente de (2), para así considerar una ecuación ligeramente distinta:

$$x(1-x)y'' - (2x+l)y' + l(l+1)y = 0 \tag{5}$$

y entonces es agradable descubrir que los polinomios de Daubechies [5], para $|x| \leq 1$:

$$\begin{gathered} d_0 = 1, \quad d_1 = 1 + 2x, \; d_2 = 1 + 3x + 6x^2, \\ d_3 = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3, \\ d_4 = 1 + 5x + 15x^2 + 35x^3 + 70x^4, \\ d_5 = 1 + 6x + 21x^2 + 56x^3 + 126x^4 + 252x^5, \text{ etc.,} \end{gathered} \tag{6}$$

son soluciones de (5). La **Fig. 1** muestra los polinomios (6), en donde sólo podemos ver sus raíces reales; en general, sus raíces son complejas, por ejemplo, los ceros de d_6 son (0.1411+0.3421 i), (-0.1246+0.2832 i), (-0.2665+0.1073 i) y sus conjugados. Además, ahí notamos que $d_l(0)=1$ y $d_l(x) > 0$ si $x>0$, así las raíces reales son negativas.

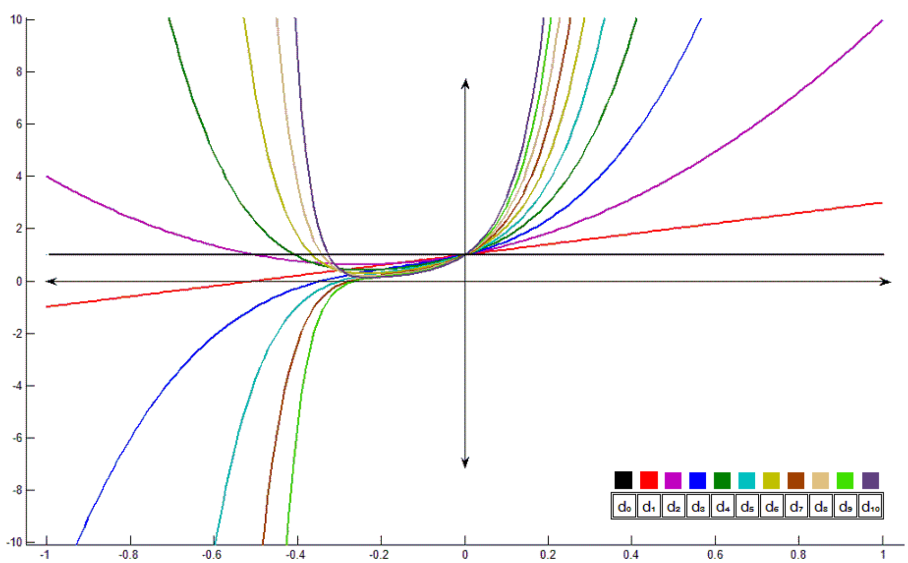

Figura 1.- Polinomios de Daubechies.

Los d_l son muy importantes en la construcción de las wavelets de Daubechies con soporte compacto. Existe una cercana relación entre los ceros de d_l y los $2l$ coeficientes de filtrado $h(l)$ de las wavelets de Daubechies D_{2l} [5]. Por lo tanto, es fundamental la búsqueda de algoritmos eficientes para encontrar las raíces de los polinomios de Daubechies, especialmente cuando l es grande. Aquí exhibimos ciertas conexiones entre (1) y (6), esperando así que la experiencia acumulada con las raíces de las funciones de Legendre pueda ser útil en el análisis de los ceros de (6).

Es fácil encontrar la correspondiente modificación de (4):

$$d_l(x) = \lim_{\lambda \to 0} {}_2F_1(-l, l+1; -l+\lambda; x) \tag{7}$$

y así (3) adopta la conocida forma [5]:

$$d_l(x) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l+k}{k} x^k \tag{8}$$

Por lo tanto, en la ecuación:

$$(1-x)y'' - (2x+a)y' + l(l+1)y = 0 \tag{9}$$

podemos indicar dos casos de interés:

$$y(x) = \begin{cases} P_l^x, & a=-1, \quad 0 \le x \le 1 \\ d_l(x), & a = l, \quad |x| \le 1 \end{cases} \tag{10}$$

con las siguientes fórmulas de Rodrigues:

$$P_l^x(x) = \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dx^l} [x(1-x)]^l \tag{11.a}$$

$$d_l(x) = \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{l+1} \frac{d^l}{dx^l} \left[\frac{(x-1)^{2l+1}}{x} \right] \tag{11.b}$$

las cuales generan a (1) y (6). La expresión:

$$y(x) = \frac{\left[b + l + (1-b)(-1)^l\right]}{(l+1)!} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{b+l} \frac{d^l}{dx^l} \left[\frac{(x-1)^{b+2l}}{x^b} \right], \tag{12}$$

para $b = -l$ y $b = 1$ reproduce (11.a) y (11.b), respectivamente.

La relación (8) puede escribirse en la forma:

$$d_l\,(x) = \sum_{k=0}^{l} d_{lk} x^k, \qquad d_{lk} = \binom{l+k}{k}, \qquad k = 0,1,\dots,l \tag{13}$$

entonces es inmediato obtener que:

$$d_{l0} = 1, \qquad d_{lj} = \sum_{k=0}^{j} d_{l-1}, \qquad j = 1,\dots,n-1 \tag{14}$$

$$d_{ll} = 2d_{l,\ \ l-1}$$

lo cual significa que los coeficientes de $d_{l-1}(x)$ permiten construir a $d_l(x)$. Finalmente, notemos la propiedad:

$$(1-x)^{l+1}\ d_l(x) + x^{l+1} d_l(1-x) = 1 \tag{15}$$

IV. CONCLUSIÓN

La intención básica de esta Carta fue mostrar el paralelismo existente entre los polinomios de Legendre modificados y los polinomios de Daubechies.

REFERENCIAS

[1] E. Hernández and G. Weiss, *A first course on wavelets*, CRC Press, London (1996)

[2] Y. Nievergelt, *Wavelets made easy*, Birkhäuser, Berlin (1999)

[3] A. J. Jerri, *Wavelets, Sampling Pub*., New York (2007)

[4] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM Philadelphia (1992)

[5] N. M. Temme, *Asymptotics and Numerics of Zeros of Polynomials That Are Related to Daubechies Wavelets* Appl. Comp. Harmonic Analysis **4** (1997) 414-428.

[6] H. Hochstadt, *The functions of Mathematical Physics*, Dover, New York (1986)

[7] C. Lanczos, *Applied analysis*, Dover, New York (1988)

[8] J. B. Seaborn, *Hypergeometric functions and their applications*, Springer-Verlag, New York (1991)