

Transformaciones locales de Lorentz y Paradojas Relativistas

J G Quintero D¹ and J A Franco R²

ABSTRACT: En trabajo previo fue demostrado que las conocidas transformaciones entre sistemas inerciales con movimiento relativo de Lorentz (LT) eran erróneas, y que las transformaciones vectoriales de Lorentz (VLT), versión corregida de las LT, son transformaciones que respetan verdaderamente tanto el principio de la conservación de la estructura de las leyes físicas como la constancia de la velocidad de la luz como una ley física universal en cualquier sistema inercial. En este trabajo se presenta un nuevo enfoque que clarifica la vía de cómo obtener consecuencias prácticas de la aplicación de las VLT a la medición de magnitudes físicas.

KEYWORDS: Relatividad especial, Transformaciones de Lorentz, Transformaciones Vectoriales de Lorentz, dilatación del tiempo, contracción de longitud, paradojas de los gemelos, de la escalera y el garaje, y la de Bell.

I INTRODUCCIÓN

Como se expresa comúnmente en la literatura relativista, algunas de las consecuencias prácticas de las transformaciones de Lorentz (LT), bajo condiciones de simultaneidad de acontecimientos, u ocurrencia en el mismo sitio, son conocidas como la contracción de la longitud y la dilatación del tiempo, respectivamente. En este trabajo tales conceptos son re-evaluados.

Para analizar los resultados o las relaciones que se obtienen de las transformaciones vectoriales de Lorentz, o transformaciones corregidas de Lorentz, recordemos las condiciones existentes dentro del análisis de tales transformaciones:

- a) Se consideran dos sistemas inerciales con movimiento relativo entre ellos y un observador colocado en cada sistema con equipo necesario, previamente calibrado, para medir tiempos y distancias.
- b) Debido a la relatividad del movimiento, cada observador considera su sistema como fijo y el otro que se mueve en una velocidad constante. En esta situación y sin ninguna otra referencia, es imposible demostrar qué sistema se está moviendo, como fue demostrado por Einstein en 1905 [1].
- c) Cuando ambos sistemas inerciales coinciden en un mismo punto, un pulso de luz se envía al espacio y las medidas de su trayectoria son hechas por cada observador dentro de su sistema inercial "sin ningún conocimiento del otro observador situado en el otro sistema". Así, cada observador mide desde su origen de coordenadas un radio-vector distinto hasta el punto P en el espacio, elegido previamente y al cual el pulso de luz llega.

En este análisis los postulados siguientes son considerados como válidos:

¹Independent Researcher, Caracas, Venezuela, Journal.of.VR@hotmail.com

²Independent Researcher, Caracas, Venezuela, jfrancor@yahoo.com

- 1) Cada observador de manera independiente mide el mismo valor c de la velocidad de la luz.
- 2) Las leyes de la Física son iguales en cualquier sistema inercial de referencia.

Hemos visto antes en la derivación de las transformaciones vectoriales de Lorentz (VLT), que el tiempo es un vector dependiente de los coordenadas espaciales [2]. Aunque fueron derivadas tomando como base un pulso de luz, sus relaciones son válidas para cualquier tipo de proyectil con una velocidad distinta a la de la luz. Tales transformaciones (VLT) son:

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{t}' = \frac{\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r} - v \cdot dt}{\left| dt - \frac{v}{c^2} \cdot d\mathbf{r} \right|}; \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}' + v \cdot \mathbf{t}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}' + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}' + v \cdot dt'}{\left| dt' + \frac{v}{c^2} \cdot d\mathbf{r}' \right|} \quad (1)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}' + v \cdot \mathbf{t}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}' + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}' + v \cdot dt'}{\left| dt' + \frac{v}{c^2} \cdot d\mathbf{r}' \right|}; \quad \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{t}' = \frac{\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r} - v \cdot dt}{\left| dt - \frac{v}{c^2} \cdot d\mathbf{r} \right|}; \quad (2)$$

Observe: $\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r} - v \cdot dt}{\left| dt - \frac{v}{c^2} \cdot d\mathbf{r} \right|} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} - v}{\left| 1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|} = \frac{\mathbf{u} - v}{\left| 1 - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{u} \right|}$; $y: \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}' + v \cdot dt'}{\left| dt' + \frac{v}{c^2} \cdot d\mathbf{r}' \right|} = \frac{\mathbf{u}' + v'}{\left| 1 + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{u}' \right|}$

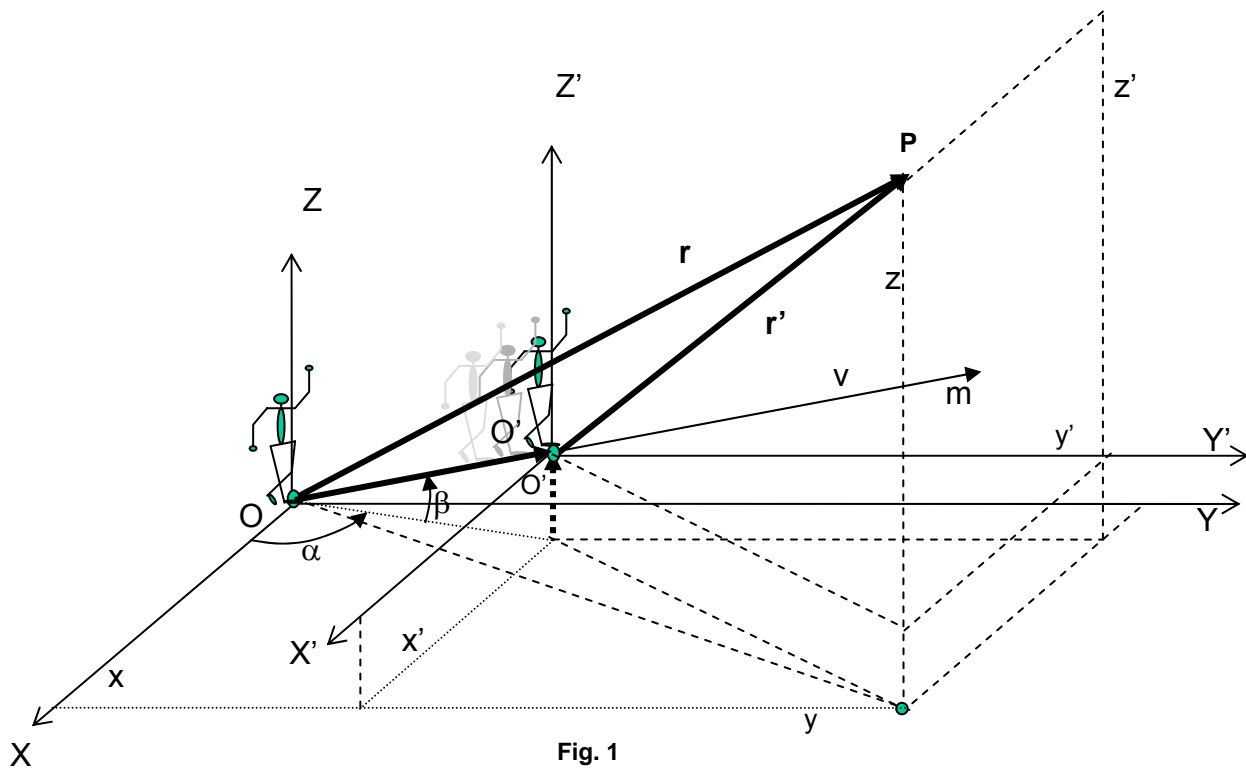


Fig. 1

Las expresiones de las transformaciones directas (tres primeras) e inversas (tres últimas) en (1) fueron obtenidas considerando el sistema O, fijo, y el sistema O', moviéndose con respecto a O. Similarmente, las expresiones en (2) son para una configuración opuesta. Por ejemplo, ahora O' es fijo y O, móvil.

En ecuaciones (1), la velocidad del sistema móvil es v , pero en (2) es $-v$. Observe también que la velocidad del sistema móvil O', respecto al sistema fijo O en (1), está dado por $v = v \cdot \frac{dt}{dt}$; y en ecuaciones (2) para un sistema móvil O, y O', fijo, es $v' = v \cdot \frac{dt'}{dt}$.

II INTERPRETACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES VECTORIALES DE LORENTZ

¿Ahora, cuál es el significado de cada una de las relaciones expresadas en ecuaciones (1) y (2)?

A. Transformaciones relacionadas con el Tiempo

Obviamente, las expresiones de los radio-vectores \mathbf{r} y \mathbf{r}' se obtienen fácilmente de la geometría y de la simetría observadas en el higo 1, pero del significado de t o t' no es tan claro, porque no vienen de un análisis físico o geométrico sino de una derivación matemática, donde es necesario investigar el significado de cada variable implicada. En tal sentido, intentemos analizar correctamente la transformación vectorial del tiempo. Para comenzar, reescribamos la derivación de sus transformaciones (directas e inversas), considerando el punto P moviéndose a la velocidad de la luz, el cual está siendo monitoreado por dos observadores con movimiento relativo entre ellos:

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow c \cdot \mathbf{t}' = \frac{c \cdot \mathbf{t} - v \cdot \frac{\mathbf{r}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{t}' = \frac{\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}; \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}' + v \cdot \mathbf{t}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow c \cdot \mathbf{t} = \frac{c \cdot \mathbf{t}' + v \cdot \frac{\mathbf{r}'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}' + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (3)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}' + v \cdot \mathbf{t}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow c \cdot \mathbf{t} = \frac{c \cdot \mathbf{t}' + v \cdot \frac{\mathbf{r}'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}' + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}; \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow c \cdot \mathbf{t}' = \frac{c \cdot \mathbf{t} - v \cdot \frac{\mathbf{r}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{t}' = \frac{\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad (4)$$

Puede observarse que las expresiones del tiempo, t y t' en (3) y (4), medido por los observadores, dependen del radio-vector medido del proyectil.

Para intentar clarificar desde un punto de vista físico este aspecto de las VLT vamos a enfocar ahora nuestra atención en la ecuación (3) y recordar el ejemplo siguiente: sea \mathbf{r} el radio-vector variable de un avión en vuelo inclinado rectilíneo, medido por un observador en el origen O de un sistema de coordenadas fijo, y sea \mathbf{r}' el radio-vector de posición del avión, medido por otro observador localizado en el origen O' un sistema que se mueva a la velocidad v , respecto al sistema O, vea la Fig. 1.

Sobre las expresiones del tiempo t' en (3) podemos decir que éste es el tiempo medido por el observador del sistema móvil como si él estuviera en el punto extremo P del radio-vector \mathbf{r} (de el cual es el mismo extremo \mathbf{r}') y nó en el origen O' , como es entendido generalmente. Porqué afirmamos esto?. Bien, de la expresión del tiempo t' en (3) ella se observa que su valor depende explícitamente del valor del radio-vector \mathbf{r} . Esta sola característica sugiere su propia explicación, porque si no estuviera dependiendo del radio-vector \mathbf{r} , el valor de t' sería igual para cualquier valor del radio-vector \mathbf{r} , y no lo es.

Por el contrario, para cualquier punto P en reposo en relación con O' , localizado en cualquier lugar de este sistema móvil que viaja a la velocidad v respecto a O, la transformación sobre el tiempo medido por uno y otro observador se hace independiente del valor de \mathbf{r} . En efecto, dado que P se mueve a la velocidad v , su radio-vector vendrá dado por $\mathbf{r} = v.t$. Luego, substituyendo, tenemos:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot v.t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t \quad (5)$$

El tiempo t es medido en el punto P. Como caso particular, localicemos el punto P en reposo en el origen de coordenadas del sistema móvil O' . Así pues, debido a que el tiempo es medido en este punto especial podemos entonces referirnos a él como el tiempo local en O' .

$$t_{O'} = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot v.t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t_{O'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t \quad (6)$$

$$\Rightarrow t = \frac{t_{O'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{Time Dilation}) \quad (7)$$

Por otro lado, debido a que dicho punto P, aunque situado en reposo en el origen de coordenadas del sistema móvil O' , el mismo se desplaza a una velocidad respecto a O. Trataremos de obtener la misma relación (7), usando la transformación inversa VLT en (3), como chequeo de consistencia:

$$t = \frac{t_{O'} + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_{O'} + \frac{v}{c^2} \cdot (0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t = \frac{t_{O'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t_{O'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t \quad (\text{Contracción-tiempo en } O') \quad (8)$$

Este resultado indica que el análisis ha sido conducido correctamente: Un observador fijo en O se da cuenta que su tiempo medido es mayor que el dado por un reloj situado en el origen móvil O' o que él experimenta una dilatación del tiempo en relación con que fue medido por el otro observador en O' , (7). E inversamente, el observador situado en el origen O fijo, el cual es consciente que él se está moviendo con respecto al origen, aprecia que su tiempo medido experimenta la contracción correspondiente en relación con del tiempo O, especificada por el resultado obtenido aplicando la transformación inversa en la ecuación (8).

Cambiamos el papel de los observadores. El punto P ahora estará situado en reposo en el origen de coordenadas del sistema móvil O, desplazando en en relación con, O', fijado, los VLT del tiempo que se aplican están éstos en las ecuaciones (4). Debemos obtener el resultado opuesto a ése (7).

$$t_o = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot (-v \cdot t')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t_o = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t' \tag{9}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{t_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{Dilatación del tiempo en O'}) \tag{10}$$

Aplicando la transformación inversa se obtiene consistentemente:

$$t' = \frac{t_o - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_o - \frac{v}{c^2} \cdot (0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t' = \frac{t_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow t_o = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t' \quad (\text{Contracción-tiempo en O}) \tag{11}$$

De esta manera y en este momento del análisis, podemos establecer que el tiempo $t' = T$ indicado por un reloj en el origen del sistema móvil O', es medido por un observador fijo en O como su tiempo real $t = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, retrasado respecto a $t' = T$, como se indica en ecuaciones (7), (8) y (10),

(11) sin ninguna duda. En este sentido, un experimento físico se puede conducir para corroborar el hecho de la dilatación del tiempo (hecho con éxito en el 1971, [Experiment of Hafele-Keating](#)) predicho también por este análisis teórico del VLT, debido a que todas las condiciones para medir tiempos locales son precisamente establecidas y conocidas.

Es importante establecer que la limitación que aparece al final del principio de "Resulta imposible saber si un sistema inercial A se mueve con respecto otro B, o si en realidad B se mueve con respecto a A, *sin el conocimiento de cualquier otra referencia*", deducida por Einstein en [1] (aunque también Newton y Galileo lo indicaron) es completamente correcta como fue demostrada física y matemáticamente por los resultados anteriormente obtenidos con el uso directo e inverso de las VLT. Determinar cuál es el sistema móvil y cuál es el que uno considera fijo es la pista para solucionar cualquier paradoja presentada, y ello es posible en este análisis.

Hemos presentado de una manera detallada este análisis a fin de evitar algunas confusiones que se presenten generalmente referidas al malentendido de la diferencia entre la transformación inversa y la directa, cuando ellas no se refieren el mismo acontecimiento, sino a uno distinto. Las paradojas han aflorado, y han salido mucho desde que la relatividad fue lanzada con éxito por Einstein y cuando las fórmulas relativistas se aplican sin cuidado a los casos donde no son aplicables.

De lo que se ha visto, podemos entonces hablar sobre los arios puntos posibles donde distintos tiempos se pueden medir para un mismo acontecimiento que ocurre cerca de dos observadores con movimiento relativo entre ellos, Por ejemplo, podemos medir el tiempo en el origen fijo O con un reloj midiendo t ; otro reloj en el origen móvil O' que mide $t_{O'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t$, y un tercer reloj dentro

del avión moviéndose a velocidad $\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{u}'$ con respecto al origen O', midiendo: $t'_p = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Y muy similarmente, podemos también hablar de los varios puntos posibles con los movimientos relativos, donde tiempos distintos pueden ser medidos para este segundo caso, es decir: en el origen fijo O' con un reloj midiendo t' ; otro reloj en el origen móvil O, midiendo $t_o = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot t'$, y también un tercer reloj dentro del avión que se mueve a otra velocidad u' respecto a O' (la cual

necesita ser considerada en la expresión de la variable \mathbf{r}'), midiendo: $t_p = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Puede

observarse que las fórmulas de VLT cambian de un caso al otro, cambiando los papeles y significados de las variables, es decir: \mathbf{r}' , t' , cambia a \mathbf{r} , t , pero inversamente \mathbf{r} , t , cambia a \mathbf{r}' , t' , y v , cambia a $-v$. Sin embargo, aunque obtenemos expresiones similares de las transformaciones inversas derivadas de las directas, el significado de las variables no cambia. Es importante tener en mente lo que está ocurriendo a fin de evitar confusiones y no entrar en contradicciones (paradojas).

Otro aspecto significativo a establecer para simplificar el análisis anterior es que el punto P en reposo podría ser referido a cualquier otro punto genérico en reposo respecto a su origen de coordenadas O' en el sistema móvil. Esto significa, como debería ser obvio, que si un observador está en reposo en el origen O' del sistema móvil y otros dos observadores más, ubicados en puntos genéricos P_1 y P_2 , estando también en reposo respecto O', todos leerán en sus los relojes el mismo tiempo, sin importar si el sistema se está moviendo (como un todo a la velocidad v) respecto al otro sistema considerado fijo. Es importante enfatizar este aspecto físico que sucede en eventos relativistas. Es como si cualquier punto del sistema móvil se comporta como si él estuviese localizado en el origen O' del sistema. Así, la estructura del factor de Lorentz que relaciona ambas medidas de tiempo en puntos genéricos se preserva igual al existente entre los orígenes O y O'.

Refiriéndonos a las expresiones del tiempo $t_{O'}$ en (6) y/o del tiempo t_o en (9), es significativo decir que constituyen un resultado muy relevante, puede ser el más importante del análisis de buscar usos prácticos de VLT, como él va a ser demostrado pues avanzamos en este desarrollo.

B. Transformaciones relacionadas con la Longitud

Por otro lado, sea una barra en reposo concerniente al origen O' de un sistema inerciales móvil situado en el eje de X, y la medida de la longitud de tal barra es tomada por un grupo de personas que conocen que la distancia de los extremos de la barra A y B al origen O' , x'_B y x'_A no cambian en ningún momento debido a ella esté en reposo con respecto a O' . Debido a esto, para el observador situado en O' la longitud de la barra no cambia con el transcurrir del tiempo, preservándose constante e igual a $x'_B - x'_A = L_0$. Esto implica que el tiempo, aunque transcurra, debe ser considerado igual dentro de las ecuaciones de las VLT para todos los puntos situados en reposo respecto al origen O' , es decir: $t_B = t_A = t_{O'} = t$:

$$x'_B - x'_A = \frac{x_B - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_A - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(x_B - x_A) + v(t - t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12}$$

$$\Rightarrow L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{Contracción de longitud})$$

En el análisis anterior, la consideración de $t_B = t_A = t_{O'} = t$, define realmente la simultaneidad dentro de un sistema donde todo está en reposo, y la consideración del origen O' , para el análisis anterior del tiempo, como el punto especial de referencia para hacer cualquier medición, define el mismo sitio de ocurrencia del evento.

El análisis anterior es no solamente válido para una barra situada en el eje X, sino también para cualquier orientación fija de la barra en reposo ocupando cualquier posición dentro del sistema con origen en O' . Este sistema se mueve como un todo respecto al sistema fijo a la velocidad v . Las consideraciones de igualdad para el tiempo en cualquier punto son igualmente válidas. Así pues, la longitud de la barra se conserva constante e igual a L_0 , como en efecto lo es para el observador en O' .

$$\| \mathbf{r}'_B - \mathbf{r}'_A \| = \left\| \frac{\mathbf{r}_B - v\mathbf{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\mathbf{r}_A - v\mathbf{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\| = \left\| \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\| = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{Contracción de longitud}) \tag{13}$$

El resultado anterior indica que las medidas de longitud hechas por el observador situado en el origen O del sistema fijo dan un valor que es menor que lo medida en el sistema móvil, y que la contracción de la barra medida por el observador fijo es dada por un factor el cual es el mismo, independientemente tanto de la orientación de la barra como de la dirección del movimiento del sistema móvil.

Calculando a través de la transformación inversa, usando $\mathbf{r}' = k.(\mathbf{r} - v.t) \Rightarrow \mathbf{r} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{r}' + v.t$,

obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\| &= \left\| \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (\mathbf{r}'_B - \mathbf{r}'_A) \right\| = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{(x'_B - x'_A)^2 + (y'_B - y'_A)^2 + (z'_B - z'_A)^2} = L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0 \\ \Rightarrow L &= L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{Contracción de longitud}) \end{aligned} \tag{14}$$

En este momento, es importante decir que lo que fue observado antes para la magnitud tiempo es similarmente observado para la longitud: un observador fijo en O se da cuenta que su medida de la longitud de la barra es menor que la medida desde el origen O', o él detecta una contracción de la longitud en relación con lo que fue medido por el observador móvil en O', según la ecuación (13). E inversamente, el observador situado en el origen O', quien tiene conocimiento que él se está moviendo con respecto al origen O, aprecia que su medida de la longitud de la barra experimenta una extensión en relación con de la longitud medida en O, dada por el resultado inverso de la transformación obtenido en la ecuación (14). Esta observación evita cualquier malentendido, o la posibilidad de caer en contradicciones y/o paradojas en este análisis relativista.

Suponga ahora que en lugar de una barra, una caja de lados rectangulares f , g and h , con un volumen $V'_0 = V_0 = f.g.h$ localizada en algún lugar, en reposo respecto al origen O', es medida por el observador localizado en el origen O', del sistema móvil. ¿Qué volumen mediría el observador en el origen O del sistema fijo?. Expresemos f , g y h

como $f = |\mathbf{r}'_B - \mathbf{r}'_A|$, $g = |\mathbf{r}'_C - \mathbf{r}'_B|$, y $h = |\mathbf{r}'_D - \mathbf{r}'_C|$, las distancias entre los puntos A y B, B y C, y C y D, respectivamente, y que cada distancia se denoten como

$|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_N| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M - z_N)^2}$. Operando como antes, la expresión del volumen $V = \|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\| \|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B\| \|\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_C\|$, medido por el observador en el origen fijo O en función de V_0 sería encontrado a través de:

$$\begin{aligned} V_0 &= \|\mathbf{r}'_B - \mathbf{r}'_A\| \|\mathbf{r}'_C - \mathbf{r}'_B\| \|\mathbf{r}'_D - \mathbf{r}'_C\| = \frac{\|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\| \|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B\| \|\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_C\|}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{V}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \Rightarrow V_0 &= \frac{V}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow V = V_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Contracción de volumen}) \end{aligned} \tag{15}$$

En el caso de un área se encuentra similarmente:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \|\mathbf{r}'_B - \mathbf{r}'_A\| \cdot \|\mathbf{r}'_C - \mathbf{r}'_B\| = \left\| \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\| \cdot \left\| \frac{\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\| = \frac{\|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\| \cdot \|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B\|}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{A}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 \Rightarrow A_0 &= \frac{A}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow A = A_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (\text{contracción de área}) \quad (16)
 \end{aligned}$$

La característica relevante de estos cálculos con un VLT particularizado al caso de dos observadores inerciales situados en el origen de cada de sus sistemas, que se mueven con el movimiento relativo entre ellos, es que sus resultados demuestran cómo cada magnitud tiene su propio factor característico de Lorentz cuál no depende de la orientación de la línea del movimiento relativo. Hemos llamado este uso particular de las de VLT, transformaciones locales Lorentz (LLT) [4]. Por el contrario, las transformaciones erróneas de Lorentz, como sabemos, originan diversas transformaciones transversales y longitudinales, haciendo el complejo para analizar diferencias entre las medidas de una cierta magnitud de dos observadores inerciales con el movimiento relativo entre ellos.

III PARADOJAS RELATIVÍSTICAS

- 1) **Paradoja de los gemelos** (simplificada). Para comprobar el verdadero resultado de su discusión, uno de los hermanos gemelos despegar en una nave espacial a una velocidad constante de un noveno de la velocidad de la luz y después que él regresa a la misma velocidad a la tierra su reloj registró un período de tres años. El problema es: si para el hermano en la nave espacial su reloj midió un período de tres años en el viaje, cuánto tiempo sería medido por el hermano que se quedó en la tierra?. La paradoja de los relativistas comenzó con la siguiente declaración: Bien, debido a que el movimiento relativo es a velocidad constante, ellos son sistemas inerciales, así pues, el análisis depende de cuál sistema se considera fijo: El hermano en la tierra ve que la nave espacial se aleja de la Tierra a 0.9c. Sin embargo, el hermano en la nave espacial ve igualmente que su hermano se está separando a la misma velocidad de 0.9c. así pues, al final se tienen dos soluciones y no se puede establecer cuál es la respuesta correcta.

De acuerdo con nuestro desarrollo, allí no existe ninguna paradoja porque el segundo hermano claramente comenzó un movimiento relativo desde la Tierra, considerada como el sistema fijo. Supongamos que sus relojes fueron previamente calibrados en la tierra y obviamente el hermano en la nave espacial sabe que él comenzó un viaje con un movimiento relativo respecto a la Tierra para regresar después de que él midiese tres años en su reloj. Así pues, el reloj del hermano en la tierra u observador fijo, obtendrá en función de lo que mide su hermano en la nave espacial, el observador móvil, aplicando la ecuación (7), obtendrá la medida siguiente del período de tiempo consumido durante el viaje:

$$t = \frac{t_{O'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3 \text{ years}}{\sqrt{1 - \frac{(0.9c)^2}{c^2}}} = \frac{3 \text{ years}}{\sqrt{1 - \frac{(0.9c)^2}{c^2}}} = 6.88 \text{ years}$$

Así, el viajero gemelo es 3.88 años más joven ahora que su hermano sedentario.

- 2) **La paradoja de la larga escalera y del garaje corto.** Sea una persona A con una escalera del 10 metros de longitud en reposo y una persona B en un garaje con una longitud de también 10 metros de largo. Así pues, la escalera en reposo ajusta perfectamente en el garaje, como puede ser comprobado por la persona B. La paradoja es: si la escalera larga es transportada longitudinalmente por la persona A, a una velocidad constante de $0.9c$ y él pasa a través del garaje. Entonces, debido a los efectos de la relatividad del movimiento relativo de sistemas inerciales, cuando la escalera pasa será más corta que el garaje (ella fácilmente ajusta en el garaje), como es observado por la persona B, pero, la persona A realmente ve que es el garaje el que viene hacia él a una velocidad constante de $0.9c$ y él detectaría que el garaje es realmente más corto que su escalera (la escalera es más larga, no cabe en el garaje).

Igual que antes, las longitudes de la escalera y del garaje medidas en reposo previamente por ambas personas A y B en el garaje, dan iguales resultados comprobando que tienen la misma longitud. Más adelante, la persona A comienza un movimiento, sistema móvil, respecto al garaje, sistema fijo. Así pues, la persona A está viendo siempre esa escalera como teniendo la misma longitud 10 metros, porque la escala es en reposo en relación con él. Pero el observador fijo, persona B en el garaje, detecta que la escala ha contraído. Aplicando la transformación directa en la ecuación (13) la contracción observada de la longitud está: A saber, la escala, mientras que es observada por la persona B, es contraída por efectos relativistas a partir de 10 metros a 4.36 metros.

- 3) **Paradoja de las naves espaciales de Bell.** (tomado de [Wikipedia](#)). En la versión de Bell de esta paradoja, dos naves espaciales, que están inicialmente en reposo en un cierto marco inercial común de referencia, son conectadas por una delicada y tensa cuerda. Al inicio, $t = 0$, en el marco inercial común ambas naves espaciales comienzan a acelerar, con una aceleración constante g según lo medido por un acelerómetro a bordo. Pregunta: ¿Se rompe la cuerda - es decir aumenta la distancia entre las dos naves espaciales? (la respuesta dada por J. S. Bell fue: Si)

Consideremos otro observador situado en el origen O del marco inercial de referencia, sistema que se considerará fijo, viendo lo que está sucediendo con las dos naves espaciales. Las naves espaciales comienzan su movimiento con respecto a O.

La condición de que las dos naves espaciales están aceleradas con la misma aceleración g (puede inclusive no ser constante, la Tierra en su traslación se mueve con aceleración variable y lo que está en reposo, permanece en reposo, definiendo a la tierra como un sistema inercial) simplifica el análisis relativista del problema y de su solución, porque las naves espaciales se pueden ver como un todo, como un sistema móvil, dentro del cual todo está en reposo respecto a su origen O': las naves espaciales están en reposo y también la delicada y

tensa cuerda que las conecta. Por lo tanto, la cuerda no se rompe porque todo permanece en reposo, como así lo confirmaría el observador situado en O' . Solamente el observador situado en el origen O del sistema fijo vería un acortamiento de la distancia entre el frente extremo de la primera nave espacial y el extremo posterior de la segunda nave espacial, y en general de cualquier distancia interior en reposo, debido a la contracción relativista producida por la velocidad del sistema móvil, es decir, todas las distancias internas disminuyen proporcionalmente. De acuerdo con este trabajo, el observador fijo vería también que la cuerda no se rompe, la misma situación observada por el observador en O' . Así pues, la declaración de Bell de que la cuerda se rompe, es incorrecta

III TRANSFORMACIONES LOCALES DE LORENTZ

Hemos observado cómo en el análisis crítico de las transformaciones de Lorentz (LT) así como también en el enfoque de las VLT, para obtener una contracción "limpia" de la longitud es necesario tener simultaneidad de acontecimientos. Similarmente, para observar una dilatación "limpia" del tiempo se necesita que los acontecimientos ocurran en el mismo lugar. Pero, cuando la simultaneidad o la misma localización no es posible ser logradas complejas expresiones para la contracción de la longitud y la dilatación del tiempo se presentan (¡e incorrectamente en LT!). Obviamente, viene del hecho de que estamos comparando las medidas hechas a partir de dos sistemas inerciales distintos que tienen orígenes distintos.

Lo indicado antes en el párrafo anterior estaba para explicar las fundaciones para obtener medidas locales del tiempo y de la longitud, para desarrollar correctamente lo que hemos hecho antes de una manera informal con las transformaciones locales previamente definidas de Lorentz (LLT) como caso particular de las transformaciones vectoriales de Lorentz (VLT).

La manera de alcanzar esta meta se logra haciendo que ambos observadores hagan medidas desde una misma referencia. Claramente, estaríamos modificando las condiciones originales bajo las cuales las VLT fueron desarrolladas. Recuérdese que el objetivo principal en el desarrollo de VLT era demostrar cómo dos observadores inerciales con movimiento relativo entre ellas medían la misma velocidad de un pulso de luz, cada uno haciendo tales medidas respecto a su propio sistema de la referencia. Sin embargo, es bien sabido que en una comparación, la igualación de las la mayoría de condiciones es la manera general de comparar cosas. En el caso de LLT, deseamos solamente comparar las medidas de una magnitud hecha por un observador fijo con las hechas por otro observador, móvil, y cuál es su diferencia, si la hubiera.

Así pues, veremos luego que la situación de la simultaneidad de acontecimientos y de la ocurrencia en el mismo lugar, o la contracción observada de longitudes y de la dilatación del tiempo en relatividad puede ser obtenida modificando la configuración de dos observadores inerciales distintos que miden un respecto físico de la magnitud a las referencias distintas, a la situación de medir la misma magnitud física de la misma referencia.

¿Qué significa ésto? Como es sabido, las transformaciones vectoriales de Lorentz (VLT) son las relaciones entre mediciones de longitud y tiempo, hechos por dos distintos observadores dentro de su propio marco de referencia, sin conocerse. Cuando los dos observadores miden la velocidad de la luz ellos la hacen tomando como referencia su propio origen de coordenadas, el origen O para el observador fijo, y el origen O' para el observador móvil, con el resultado de que el valor de la velocidad de la luz obtenida por cada uno es la misma. Ahora, planteemos la situación de que las medidas de las magnitudes físicas para ambos observadores deban ser hechas desde una misma referencia.

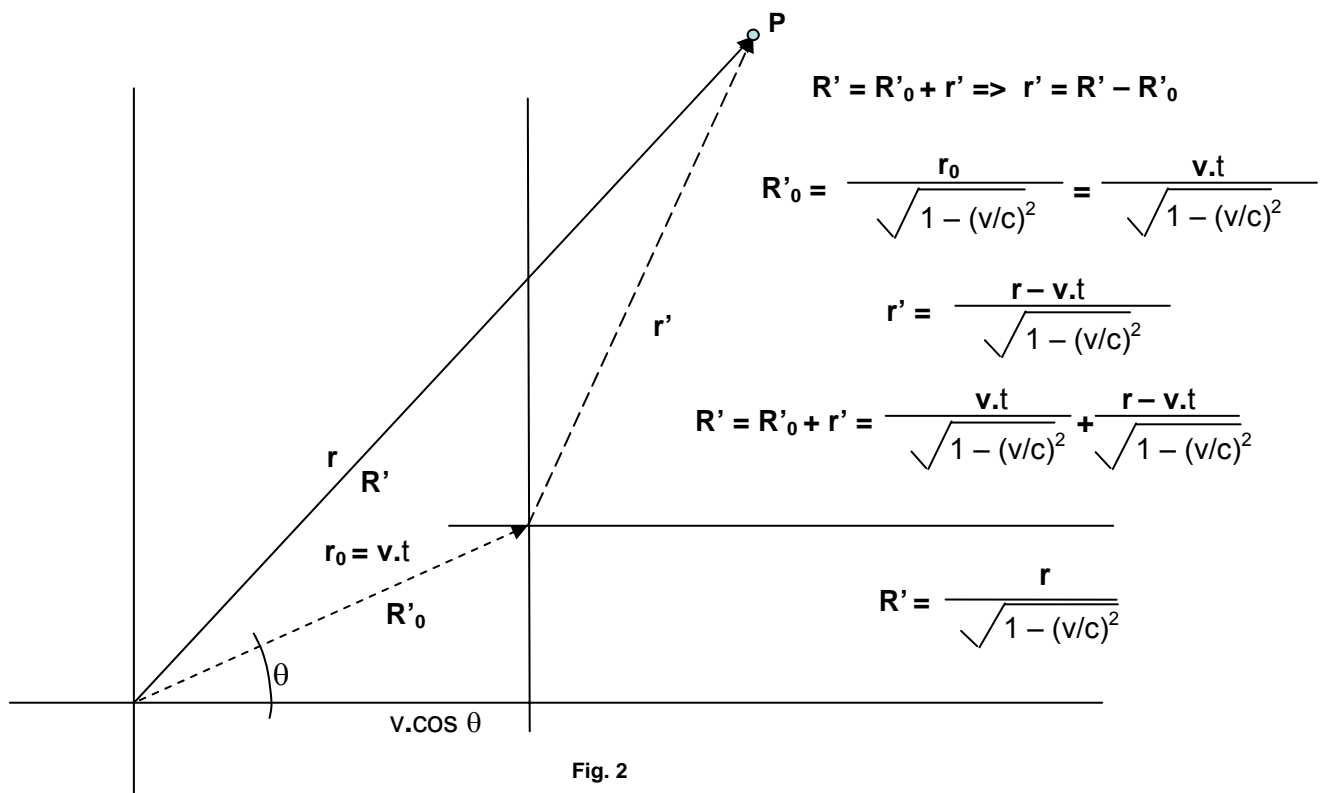
Establezcamos que cada observador conoce de la presencia del otro observador, y acuerdan las magnitudes de la medida durante el "mismo período del tiempo", tomando como referencia el mismo origen de coordenadas, para comparar sus resultados. Estas medidas, por supuesto darán diferentes resultados si se

comparan con los obtenidos a partir de las transformaciones vectoriales de Lorentz, las cuales son hechas tomando como referencia distintos orígenes de coordenadas. Veremos también que esta nueva configuración nos dará las relaciones prácticas que no son dependientes en la orientación del movimiento del cuerpo. Para sistematizar las ideas y aplicarlas a una comparación verdadera de medidas de magnitudes físicas para obtener formalmente las transformaciones locales de Lorentz, se establecerán las dos convenciones siguientes:

- 1) En adelante, ambos observadores harán sus medidas tomando el mismo punto de referencia. Sea el origen del observador fijo esta referencia. Por ejemplo, si el observador fijo O mide el radio-vector \mathbf{r} de un proyectil enviado al espacio, vea **Fig. 2**, el observador en el sistema móvil O' medirá un radio-vector similar \mathbf{R}' desde la misma referencia del observador fijo, tal que \mathbf{R}' satisfará $\mathbf{r}' = \mathbf{R}' - \mathbf{R}'_0$, con las definiciones de las variables \mathbf{R}' y \mathbf{R}'_0 dadas abajo:

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}.t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\mathbf{v}.t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}'_0; \text{ for } \mathbf{R}'_0 = \frac{\mathbf{v}.t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{r}_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ and } \mathbf{R}' = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17)$$

Entonces, lo medido por el observador móvil estará relacionado con la del fijo, a través del factor de escalamiento de Lorentz, Cada magnitud física tiene su propio factor característico.



- 2) El observador móvil O' no enviará ningún pulso de luz (o proyectil) a ningún punto P en ningún instante. Así, él medirá un desplazamiento nulo del proyectil, $\mathbf{r}' = 0 \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ y $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0$.

De este modo, el radio-vector de su sistema móvil, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ será la única medida completada. Sean $\mathbf{t} = \mathbf{T}$ y $\mathbf{t}' = \mathbf{T}'$ los tiempos medidos en el origen de cada sistema. Por lo tanto, de las expresiones generales de VLT obtenidas previamente y de las convenciones aplicadas, se obtienen las transformaciones locales de Lorentz (LLT) :

$$\mathbf{r}' = 0 \Rightarrow \mathbf{r} = v \cdot \mathbf{T} = \mathbf{r}_0; \quad \mathbf{T}' = \frac{\mathbf{T} - \frac{v}{c^2} \cdot v \cdot \mathbf{T}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{T}' = \mathbf{T} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad \mathbf{R}' = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v \cdot \mathbf{T}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (18)}$$

En suma, las medidas de \mathbf{R}' , \mathbf{T}' , \mathbf{R} , \mathbf{T} , y $\mathbf{r} = v \cdot \mathbf{T} = \mathbf{R}$, del movimiento del origen O' son hechas ahora por los observadores móvil y fijo, tomando como único punto de referencia el origen del sistema O . Como observamos en (18), los vectores tiempo y distancia están relacionados por un factor de escalamiento característico. El factor de escalamiento, en el caso del tiempo, es un multiplicador dentro de cada componente con un valor menor que la unidad. Para las distancias, es un divisor. En otras palabras, si cualquier componente de un parámetro tiene el mismo tipo de factor la contracción o la extensión es igual en cualquier dirección. Por ejemplo, una esfera se amplía uniformemente en todas las direcciones de acuerdo a su factor de escalamiento dependiendo de su velocidad y de la velocidad de la luz.

Es importante enfatizar que las LLT son medidas tomadas con respecto al punto de referencia O del sistema fijo lo cual es totalmente diferente a lo que se hace para VLT, donde cada observador hace sus medidas con respecto a su propio origen de su sistema de referencia. A saber, las transformaciones referidas como LLT son diferentes a las de VLT.

Con esas dos convenciones en mente, no deberemos preocuparnos por coincidencia en el sitio o por simultaneidad de acontecimientos. Las relaciones (18) implican que en las LLT cada magnitud física de un objeto móvil observada por un observador fijo, en virtud de su dependencia de la velocidad, de una manera verdadera se contrae, se amplía, crece o se reduce, con el mismo factor de escalamiento en todas las dimensiones, independientemente de su forma o imagen. Por ejemplo, si en el sistema móvil un observador en O' mide una barra de la longitud L_0 , y mide un tiempo t_0 , el observador en el origen O del sistema fijo medirá esta longitud como L y el tiempo como t . La posición de la barra en el sistema O' no es relevante; lo importante es que él esté en reposo para el observador en O' y moviéndose respecto al observador en O . Así, la relación entre ambas medidas, según LLT, será:

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_0 = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \quad L = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (19)$$

Esto indica que el observador en un sistema "inmóvil" mide sobre una barra que se mueve a una la velocidad v , una contracción de su longitud original L_0 a L , sin importar cual sea la posición de la

barra en el sistema O', y una dilatación del tiempo de t_0 a t , como se muestra en las ecuaciones (19).

Otra característica relevante es la siguiente: Los factores de Lorentz en LLT actúan como factores de escalamiento entre medidas hechas en O y las hechas en O', para cualquier magnitud, no importa si ésta es una magnitud diferencial o integral. Es decir los factores de Lorentz son simplemente factores de escalamiento entre tales medidas. ¿Cuál es el significado verdadero de LLT expresado en las ecuaciones (19)? Lo primero es que cada componente es afectada por su factor característico de Lorentz de la misma manera, a saber, contrayendo las longitudes o dilatando los tiempos. Por ejemplo, una placa cuadrada con un área en reposo $S_0 = L_0^2$, según la ecuación (16), obtendremos:

$$S' = S_0 = L_0^2 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow S_0 = \frac{S}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow S = S_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (20)$$

Y un volumen $V' = L_{01} \cdot L_{02} \cdot L_{03}$, medido desde O' en reposo está relacionado al volumen medido desde O, $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$, viene dado por el producto de sus tres lados contraídos (21):

$$V' = V_0 = L_{01} \cdot L_{02} \cdot L_{03} = \frac{L_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{L_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{L_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L_1 L_2 L_3}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow V_0 = \frac{V}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (21)$$

$$\Rightarrow V = V_0 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

La velocidad del vector del origen O', obtenida distinguiendo la dislocación respecto de O' al tiempo originará, el LLT siguiente:

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{R}'}{dt'} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{dt \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (22)$$

En este momento advertimos que la velocidad del sistema móvil O', juega dos papeles: como escalar, cuando está dentro del factor de escalamiento, en donde un observador ve al otro moverse respecto a sí mismo sobre la misma línea del movimiento relativo, o también como vector, medido por el observador en O' en su propio marco tomando como referencia el origen del otro sistema O, bajo las convenciones de las LLT. Después de hacer este necesario paréntesis, la LLT para la aceleración se obtiene fácilmente de manera semejante como en (22):

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{\frac{d\mathbf{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{d\mathbf{v}}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (23)$$

Es también necesario decir en este momento que el origen O' podría también tener un movimiento **al largo de una trayectoria curvilínea con velocidad variable y sin embargo ser un sistema inercial!** Por ejemplo la tierra tiene un movimiento curvilíneo inercial indudable alrededor del sol, y aunque acelera al ir a perihelio y reduce su velocidad cuando va al afelio, no sentimos nada, los edificios mantienen su verticalidad, y el equilibrio de cualquier clase se preserva, etc. Así pues, con las transformaciones encontradas en ecuaciones (22) y (23), era de esperar obtener también las LLT de magnitudes dinámicas. Hagamos algunas observaciones. Demostraremos después, que es posible aplicar las transformaciones vectoriales de Lorentz (VLT) a un sistema inercial de coordenadas con el movimiento curvilíneo, con respecto a un sistema fijo, situado en un punto O en la trayectoria curvilínea del sistema móvil.

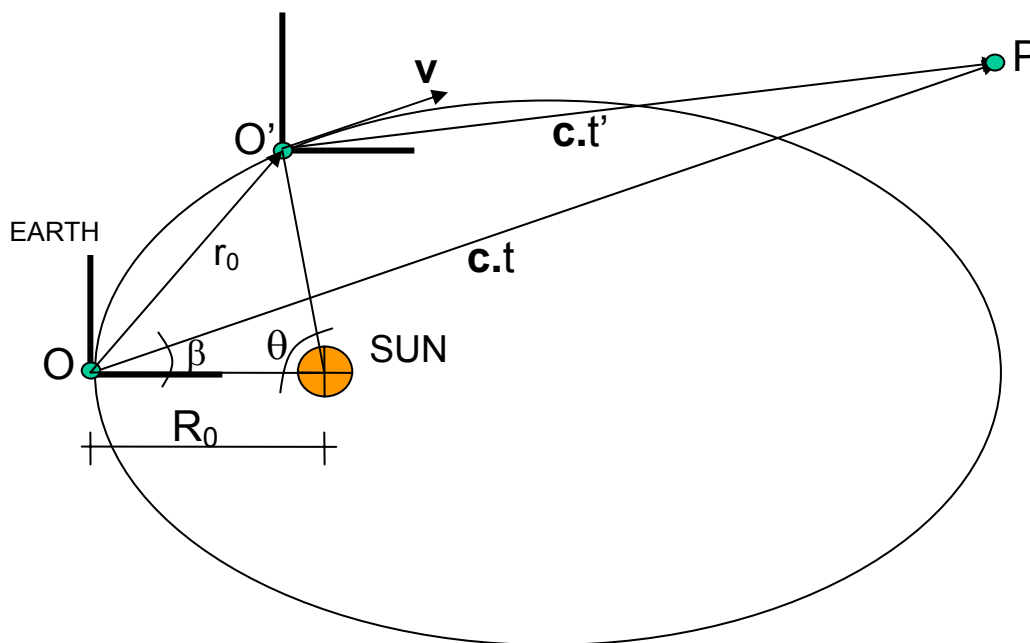


Fig. 3

Podemos establecer que los sistemas inerciales son no solamente los de aceleración nula, sino también aquéllos donde "la suma de fuerzas actuantes es nula". Éstos incluyen no solamente los de aceleración nula, observados en el movimiento rectilíneo, sino también los del movimiento curvilíneo con momento angular constante en donde la aceleración es generalmente variable.

Para el movimiento de la tierra alrededor del sol, la suma de la fuerza gravitacional del sol sobre la tierra más su fuerza centrífuga da un resultado nulo, razón por la que el movimiento de la tierra es inercial pues es de momento angular constante. De esta manera, el movimiento de la tierra no es impedido ni facilitado por ninguna fuerza externa adicional. Intentaremos reproducir este movimiento en **Fig. 3**, donde el primer observador está sobre la tierra, en O' , y el segundo observador estará localizado en la trayectoria elíptica en el punto de más cercanía al sol, el perihelio.

Sea R_0 la distancia entre el sol y la tierra en el momento cuando los observadores comienzan a medir el movimiento, y r , el radio-vector de posición genérico de la tierra. Tomando una visión más cercana, en el mero comienzo de las medidas sobre este movimiento, para dos dimensiones, véase **Fig. 4**. Digamos, cuando coinciden O' y O , un pulso de luz se envía formando un ángulo β con el eje X , vea **Fig. 3**, y un ángulo γ entre la velocidad tangencial de O' con el eje Y como se muestra en **Fig. 4**. Igualmente definamos θ , como el ángulo barrido por el radio r desde $r = R_0$, a la nueva posición del observador móvil después de un período del tiempo dt . En este momento el pulso ligero ha alcanzado el punto P .

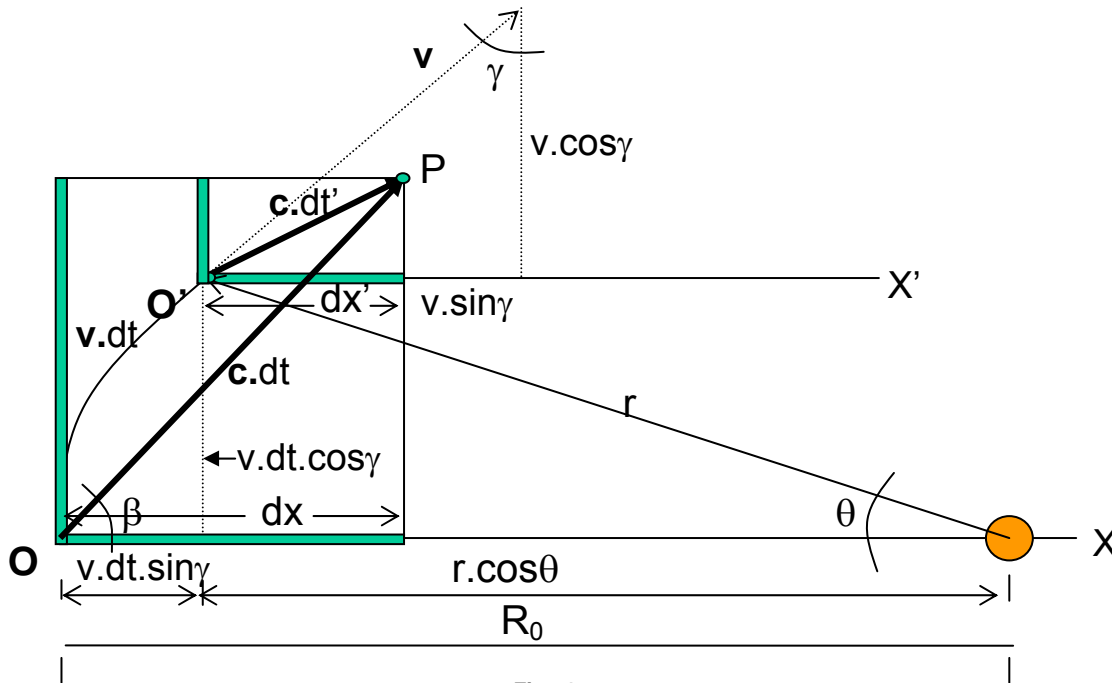


Fig. 4

De las **Fig. 3** y **4**, podemos establecer las siguientes relaciones:

$$dx' = k(dx - v \cdot dt \cdot \sin \gamma) \quad dy' = k(dy - v \cdot dt \cdot \cos \gamma) \quad (24)$$

$$v \cdot dt \cdot \sin \gamma = d(R_0 - r \cdot \cos \theta) \quad v \cdot dt \cdot \cos \gamma = d(r \cdot \sin \theta) \quad (25)$$

Dado que la velocidad de la luz es igual medido por cualquier observador, se debe satisfacer:

$$dx^2 + dy^2 = c^2 \cdot dt^2 \quad dx'^2 + dy'^2 = c^2 \cdot dt'^2 \quad (26)$$

Sustituyendo dx' , dy' , por sus expresiones (24) y (25) en (26), expresiones similares obtenidas previamente para el movimiento rectilíneo son logradas:

$$dx' = \frac{dx - v \cdot dt \cdot \sin \gamma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad dy' = \frac{dy - v \cdot dt \cdot \cos \gamma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad dt' = dt \cdot \frac{\sqrt{\left(\sin \gamma - \frac{v \cdot u_x}{c^2}\right)^2 + \left(\cos \gamma - \frac{v \cdot u_y}{c^2}\right)^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (27)$$

Es decir,
$$d\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r} - v \cdot dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} d\mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} \quad (28)$$

Estos resultados demuestran que la estructura de las VLT diferenciales para el movimiento curvilíneo es igual observada para el movimiento rectilíneo. Todo lo cual indica que su aplicación al movimiento curvilíneo es también válido y permite continuar el desarrollo de la relatividad dentro de una única teoría.

El análisis anterior fue presentado para el caso particular al principio de medidas para distinguir las longitudes x y x' de los diferenciales dx y dx' . La misma situación se puede exhibir para el punto genérico P en el que el pulso de luz está dibujando en el espacio, donde están también válidas las mismas relaciones (véase **Fig. 5**). A saber:

$$x' = \frac{x - \int v \cdot dt \cdot \sin \gamma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow dx' = \frac{dx - v \cdot dt \cdot \sin \gamma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = \frac{y - \int v \cdot dt \cdot \cos \gamma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow dy' = \frac{dy - v \cdot dt \cdot \cos \gamma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

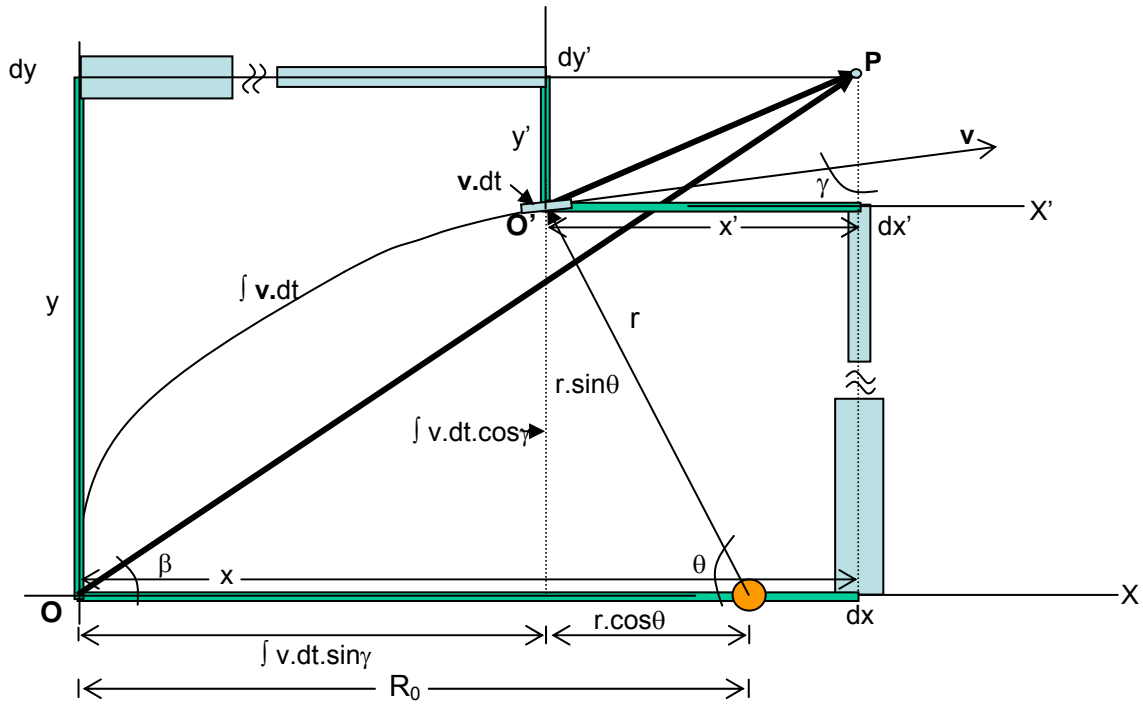


Fig. 5

Continuemos obteniendo otras transformaciones, por ejemplo, la del ángulo en sistemas inerciales. Esta magnitud emana de la relación entre la longitud curvilínea del arco s y la longitud del radio R . Debido a que ambas magnitudes son longitudes, los factores de Lorentz cancelan y el ángulo llega a ser invariante a las LLT (este resultado difiere del explicado por Einstein en la SRT [1]):

$$\alpha' = \frac{s'}{R'} = \frac{\frac{s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{R}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{s}{R} \Rightarrow \alpha' = \alpha; \quad d\alpha' = \frac{ds'}{R'} = \frac{\frac{ds}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{R}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{ds}{R} \Rightarrow d\alpha' = d\alpha \quad (29)$$

Así, la velocidad angular se transforma según el siguiente procedimiento:

$$\omega' = \frac{d\alpha'}{dt'} = \frac{d\alpha}{dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (30)$$

En la sección siguiente obtendremos las LLT de la fuerza y de otras magnitudes dinámicas.

V TRANSFORMACIONES LOCALES DE LORENTZ (LLT) PARA LA FUERZA, LA MASA Y OTRAS MAGNITUDES DINÁMICAS

Intentemos obtener una transformación dinámica para la fuerza, basada en las LLT ya conocidas.

Supongamos dos masas, m_1 y m_2 , rotando circularmente alrededor del centro de la masa CM del sistema de las dos masas, véase Fig. 6. Además deben moverse tal que sus centros de masas estén siempre en una línea que pasa a través del centro de masa del sistema de las dos masas, para asegurar así que se mueven a la misma velocidad angular.

Debido a que hemos forzado las masas a describir trayectorias circulares, ello permitirá que quitemos fuerzas gravitacionales del análisis, es decir, sólo las fuerzas centrífugas serán consideradas. Supongamos un Hércules, situado en el centro de masa CM, sosteniendo cada masa con cuerdas fuertes, una con cada brazo. Sean tres observadores: Hércules en CM, como la referencia fija; el observador 1, como la primera referencia móvil sobre la masa m_1 unida por una cuerda de longitud r_1 al CM, y el observador 2, segunda referencia móvil en masa m_2 unida por otra cuerda de longitud r_2 al CM.

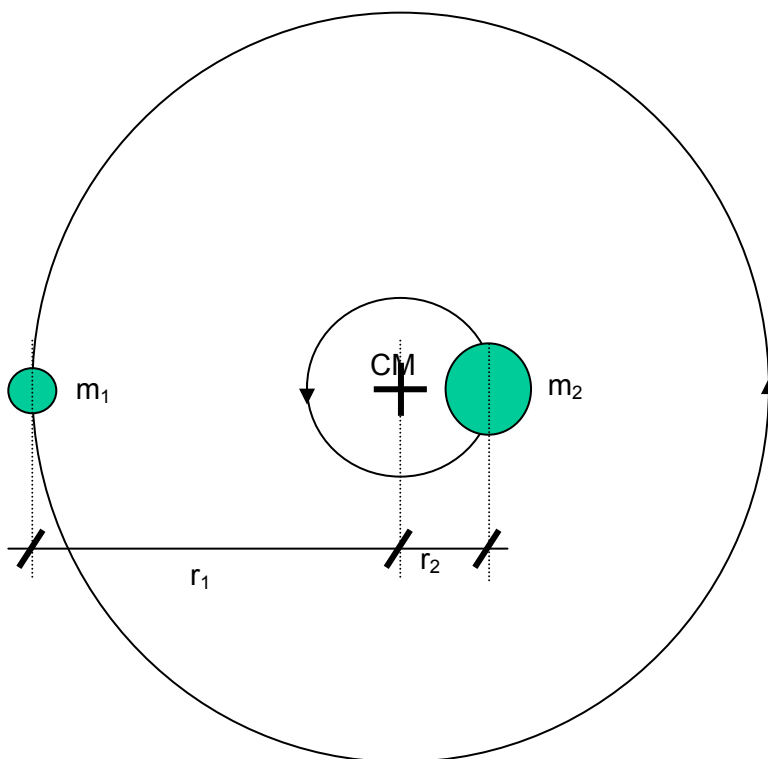


Fig. 5 Dos masas rotando alrededor de un Centro de Masa CM

- 1) Como primera conclusión, para que Hércules esté en equilibrio, él debe medir tensiones iguales y opuestas en cada brazo. Así: $m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1 = m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2$.
- 2) La tensión T_1 ejercida a la una del brazo de Hércules por la cuerda r_1 , medido por el observador 1 sobre m_1 , tomando el punto C como referencia, será $m'_1 \cdot \omega'^2 \cdot r'_1$, y la tensión T_2 ejercida en el otro brazo de Hércules por la cuerda r_2 , medida por el observador 2, tomando también el punto C como referencia sobre m_2 , será $m''_2 \cdot \omega''^2 \cdot r''_2$. Asumamos que las tensiones T_1 y T_2 sean iguales, para mantener, como antes, a Hércules en equilibrio, lo cual podría también significar que la fuerza sería invariante bajo las LLT. Los valores de magnitudes físicas de masas móviles implicadas en ambas tensiones se transforman de acuerdo a las LLT conocidas, con respecto a lo que es medido por Hércules, de la manera siguiente (a excepción de las masas, cuya transformación es desconocida):

$$m'_1 \cdot \omega'^2 \cdot r'_1 = m'_1 \cdot \frac{\omega^2}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)} \cdot \frac{r_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \equiv m''_2 \cdot \omega''^2 \cdot r''_2 = m''_2 \cdot \frac{\omega^2}{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)} \cdot \frac{r_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

La única manera para que esta relación sea siempre constante para cualquier valor de v_1 y v_2 es que las masas tengan las LLT siguientes:

$$m'_1 = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot m_1 \quad \text{and} \quad m''_2 = \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot m_2 \tag{30}$$

De esta manera los factores de Lorentz cancelan y éste implicaría que: $m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1 = m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2$, Pero, como esta igualdad fue previamente concluida como correcta en el aparte 1), entonces nuestra asunción que las tensiones T_1 y T_2 eran iguales están correctas. Esto se puede ver de otra manera. Para mantener a Hércules en equilibrio (primera conclusión), entonces las tensiones T_1 y T_2 deben ser iguales. Así, estos resultados conducen a que ellos se implican el uno al otro, es decir,

$$T_1 = m'_1 \cdot \omega'^2 \cdot r'_1 \equiv m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1 \equiv m_2 \cdot \omega^2 \cdot r_2 \equiv m''_2 \cdot \omega''^2 \cdot r''_2 = T_2.$$

Discutamos de una manera profunda esta ecuación. Cuando el observador 1 en m_1 (recuerde que él está fijo con respecto a esta masa, aunque el conjunto sea un sistema móvil) mide su masa, él mide m'_1 , que es, para él, la masa en reposo. Lo mismo aplica para el otro observador 2 que mide la masa sobre la cual él está parado: Así pues, dado que a través de este caso especial del movimiento circular hemos obtenido los factores de Lorentz para tales masas, véase ecuación (30), y porque la LLT de una magnitud tiene siempre la misma estructura, podemos concluir, de la misma ecuación (30), con la declaración siguiente: En general, una masa inercial en movimiento a una velocidad v se relaciona con su masa en reposo de la manera siguiente:

$$m = \frac{M_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{31}$$

Esta definición se diferencia de la definición total del Einstein bien conocido: $m = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. En

relación con este punto, es digno de mencionar que Einstein también obtuvo la ecuación (31) en su notable trabajo de 1905. Él llamó esta "masa longitudinal total" [1], pero él la desechó más adelante en su posterior investigación.

Continuando el análisis por otra ruta para obtener la relación entre la masa y la velocidad, el siguiente es una manera más general de llegar el mismo resultado. Por ejemplo, consideremos un par de masas, por ejemplo el sol y la tierra como si fueran los únicos cuerpos del Sistema Solar. Consideremos al Sol como la referencia fija (el centro del sol casi es el centro de la masa de este sistema), y la Tierra que se movía alrededor del sol. Así, el Momento Angular de la Tierra debajo de las LLT, medido por un observador desde el sol, es $m \cdot r^2 \cdot \omega$ y su valor debe ser constante, porque no hay fuerzas que actúen alrededor, y así, la conservación del Momento Angular es válida. El "mismo" Momento Angular de la Tierra, medido por otro observador, situado en la Tierra, tomando el Sol como su referencia para sus medidas, debe también ser constante, porque las leyes de la naturaleza son iguales en cualquier sistema de coordenadas, se convierte en:

$$m' \cdot r'^2 \cdot \omega' = m' \cdot \frac{r^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = CONSTANT \tag{32}$$

Centremos nuestra atención en la transformación explícita de los elementos implicados dentro de esta última expresión del Momento Angular a excepción de la masa de la tierra, cuya transformación todavía se considera desconocida. Cuidadosamente observando la ecuación (32), concluimos que la única manera para que esta expresión sea siempre constante, para cualquier valor de la velocidad v dentro de los factores de Lorentz, presentes en el denominador, es que la transformación para $m' = M_0$, cancele el efecto de tales factores. La solución por ejemplo es, para:

$$m' = M_0 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{33}$$

Éste es el mismo resultado obtenido previamente en la ecuación (31). Esto significa que el Momento Angular es invariante bajo las LLT (y también la Fuerza). Dado que los factores locales de Lorentz influyen uniformemente a la magnitud en todas las direcciones. No se obtienen distintas LLT para una misma magnitud, contrastando con las diferentes transformaciones para una misma

magnitud que se encuentran en la teoría especial de la relatividad (recuérdense las expresiones longitudinales o transversales de la masa, de campos, etc).

VI. CONCLUSIÓN

Hemos observado que las transformaciones locales de Lorentz (LLT) nos dan el valor dinámico verdadero de una magnitud física que se sepa valor del resto, a saber LLT nos informan que sobre la dependencia verdadera a la magnitud física tiene en la velocidad de la luz y en su propia velocidad en espacio. De esta manera, de la teoría de las paradas de la relatividad que son un tema misterioso y complejo, entendida solamente por pocos individuos, de hacer algo simple y razonable, familiar a cualquier persona, y revelando nosotros a una nueva y simple ley física que gobierna el movimiento de los cuerpos en espacio.

REFERENCES

- [1] A Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physic **17**:891, 1905. English version prepared by John Walker. [On the Electrodynamics of Moving Bodies.](#)
- [2] J A Franco R, [Vectorial Lorentz Transformations.](#) 2006. EJTP 9 (2006) 35-64.
- [3] J A Franco R, [The Lorentz Transformations: Correct Derivation and its Consequences.](#) 2007. JVR **2** (2007) **4** 25-47.