

Derivación Correcta de las Transformaciones de Lorentz.

H Escalona¹ y J A Franco R²

ABSTRACT: En este trabajo se demuestra que en la conocida derivación de las Transformaciones de Lorentz solo la coordenada x se transforma correctamente y que las asunciones hechas desde Lorentz hasta ahora, de que las coordenadas y y z , se transforman de una manera Galileana, $y' = y$, $z' = z$, **son incorrectas**. Tales asunciones dan como resultado que las transformaciones de Lorentz (LT) sean dependientes de la orientación espacial de un cuerpo en movimiento, es decir, son obtenidas las bien conocidas transformaciones transversales y longitudinales, caracterizadas por distintos factores de escalamiento relativista para una misma magnitud física. Con la derivación acá presentada, sin las mencionadas asunciones, emergen unas Transformaciones de Lorentz modificadas a las cuales hemos denominado Transformaciones Vectoriales de Lorentz (VLT, por sus siglas en inglés). Dado que Einstein nunca advirtió este error en su investigación, el mismo afecta profundamente de manera conceptual tanto a la teoría especial de la relatividad (STR) como a la Teoría General (GTR).

KEYWORDS: Special Relativity, Galilean Transformations, Lorentz Transformations. Relativistic Time and Space

I. INTRODUCTION

Después de que Einstein demostrara en 1905 la imposibilidad de descubrir si un sistema inercial A se mueve respecto a otro B o si este último se mueve respecto a A, sin existir ninguna otra referencia [1], y que se estableciera, después de un sin fin de mediciones, como un postulado la constancia de la velocidad de luz, muchas derivaciones de las Transformaciones de Lorentz (así conocidas después que el físico holandés Hendrik Antoon Lorentz las obtuviera alrededor de 1890) se han publicado en la literatura relativista. Sin embargo, todas, de una manera u otra, siguen un procedimiento similar al dado originalmente por Lorentz [2], o por Einstein, en el sentido de asumir, prácticamente todos los autores, que las coordenadas y y z se transformen a la manera Galileana, no relativista.

En este trabajo, basado en otro anterior [3], hemos derivado las transformaciones de Lorentz sin hacer las asunciones antedichas. En la siguiente sección II las transformaciones Galileanas se obtienen gradualmente de una forma general. En la sección III se trabajan las transformaciones de Lorentz **con** las asunciones mencionadas, tal como podría encontrarse en cualquier texto moderno. En la sección IV se presenta la derivación de las mencionadas transformaciones **sin** las asunciones previamente indicadas, preservando la constancia de la velocidad de la luz y la compatibilidad con las ecuaciones de Maxwell haciendo las comparaciones correspondientes con las LT clásicas. La sección V es dedicada a la derivación vectorial de las VLT y a algunas demostraciones generales de su validez para cualquier espacio n-dimensional. La sección VI está dedicada a las conclusiones de estos resultados en la Física.

II. GALILEAN TRANSFORMATIONS

¹ Executive editor of JVR, Caracas, Venezuela, Journal.of.VR@hotmail.com

² Independent Researcher, Caracas, Venezuela, jafrancor@yahoo.com

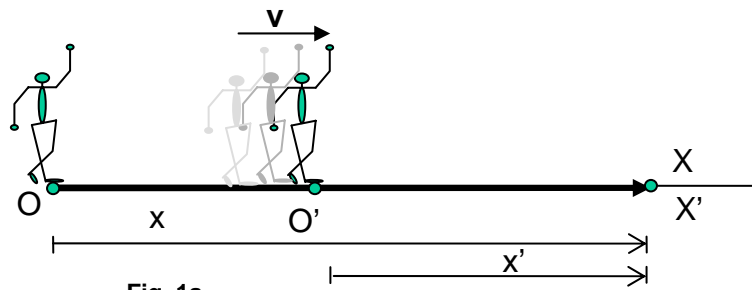


Fig. 1a

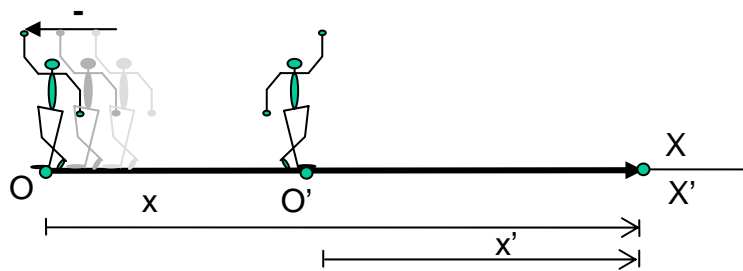


Fig. 1b

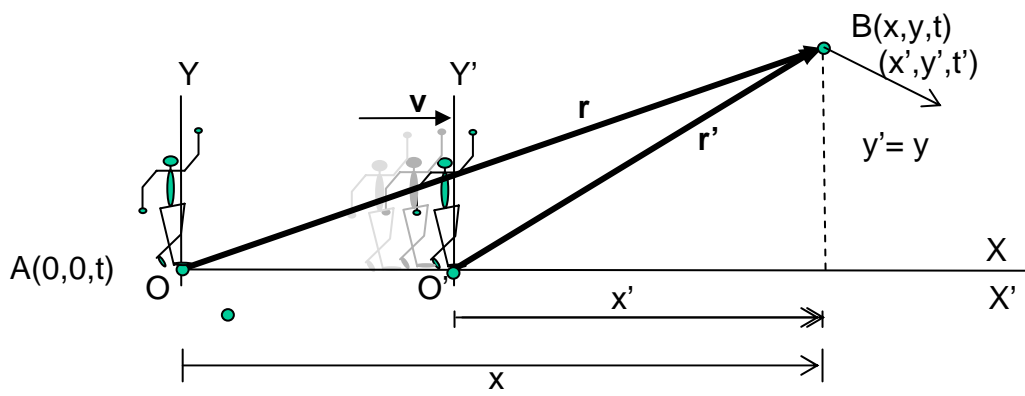


Fig. 2a

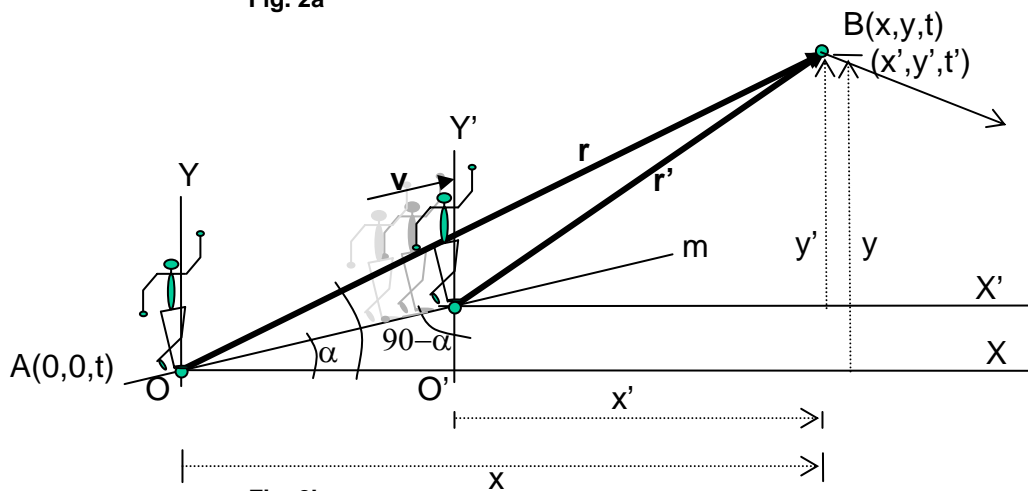


Fig. 2b

Consideremos dos sistemas coordenados paralelos, con los orígenes situados en O y en O', que se mueven, uno respecto del otro, con un movimiento de translación uniforme a lo largo de una línea que une sus orígenes. Es decir, los sistemas no rotan uno respecto del otro, y mantienen paralelas sus coordenadas. En cada origen de cada sistema está situado un observador. En el movimiento relativo de estos dos sistemas, el observador en O ve al observador en O' que se mueve con velocidad v , y el observador en O' ve a observador en O que se mueve con velocidad $-v$.

Véanse las **Figs. 1a y 1b**, referidas a un movimiento unidimensional. Cuando en la **Fig. 1a** viniendo de $-\infty$, el origen O' del sistema móvil coincide con el origen fijo O, para $t = t' = 0$, y una bala es disparada paralela al eje X, el observador fijo en O mide a una componente x del desplazamiento de la bala en su sistema, pero a observador móvil en O' medirá una componente x' distinta de tal desplazamiento. Debido a que en el espacio Galileano el tiempo es "igual" para todos observadores, de la **Fig. 1a** y por la "geometría del problema", las transformaciones galileanas y sus inversas que relacionan las mediciones entre ambos sistemas son:

$$\text{Origen O, fijo y: } t = t' : \quad \begin{array}{l} \text{(Directa LT)}_{O'}: \quad x' = x - v.t. \\ v_{x'} = v_x - v \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Inversa LT)}_O: \quad x = x' + v.t. \\ v_x = v_{x'} + v \end{array} \quad (1)$$

$$\text{Origen O', fijo y: } t = t' : \quad \begin{array}{l} \text{(Directa LT)}_O: \quad x = x' + v.t. \\ v_x = v_{x'} + v \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Inversa LT)}_{O'}: \quad x' = x - v.t. \\ v_{x'} = v_x - v \end{array} \quad (2)$$

Como observamos, las medidas de la velocidad de la bala son diferentes para ambos observadores. Esto es resultado de la lógica y del sentido común. El problema se presenta si la bala es un pulso de luz, porque conduce o a una inconsistencia o que la velocidad de la luz no se preserve constante: $c = c' + v$ o $c' = c - v$. observe también que las transformaciones directas para O fijo son iguales a las inversas para O' fijo, véanse (1) (2).

Sea un espacio Galileano de dos dimensiones y comencemos con el ejemplo referido al de la **Fig. 2a**. en el que coinciden ambos ejes X y X'. El origen O' se mueve desde $-\infty$, y mientras ambos observadores están mirando el vuelo de un de aeroplano que pasa por encima de sus cabezas en forma no paralela a ninguno de los ejes coordenados, el observador fijo en O mide una componente x y una componente y del desplazamiento del aeroplano, pero el observador móvil en O' mide un componente x' de tal desplazamiento igual a $x' = x - v.t$. El tiempo es "igual" para los observadores. De la geometría del problema, las transformaciones galileanas se convierten en:

$$\text{Origen O, fijo y: } t = t' : \quad \begin{array}{l} \text{(Directa LT)}_{O'}: \quad x' = x - v.t. \\ y' = y \\ v_{x'} = v_x - v \\ v_{y'} = v_y \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Inversa LT)}_O: \quad x = x' + v.t. \\ y = y' \\ v_x = v_{x'} + v \\ v_y = v_{y'} \end{array} \quad (3)$$

$$\text{Origen O', fijo y: } t = t' : \quad \begin{array}{l} \text{(Directa LT)}_O: \quad x = x' + v.t. \\ y = y' \\ v_x = v_{x'} + v \\ v_y = v_{y'} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Inversa LT)}_{O'}: \quad x' = x - v.t. \\ y' = y \\ v_{x'} = v_x - v \\ v_{y'} = v_y \end{array} \quad (4)$$

Las relaciones (4) son válidas cuando se considera el sistema O' fijo y al sistema O móvil.

Generalizando los resultados para el caso de dos dimensiones, favor referirse a la **Fig. 2b**, donde dos observadores, con todo el equipo para hacer medidas de longitud, del tiempo y de las velocidades sobre proyectiles móviles; el primero localizado en el origen de coordenadas de un sistema fijo O, y el segundo situado en el origen de coordenadas de un sistema móvil O'. El sistema O' se mueve en una velocidad constante v , respecto a O, pero ahora, a lo largo de una línea inclinada m tal que ambos observadores están situados sobre m . La línea inclinada forma un ángulo α con el eje X. Los ejes de ambos sistemas se mantienen siempre en paralelo, es decir X paralelo a X', Y paralela a Y' y Z paralelo a Z', pero sin coincidir ninguno de los ejes. Sea \mathbf{r} el radio-vector de una trayectoria rectilínea de un aeroplano cuyo vuelo no es paralelo a ningún eje, medido por el observador en O y sea \mathbf{r}' el radio-vector de la trayectoria rectilínea del plano, medido por el observador en O'. La meta será obtener las relaciones entre las medidas de los observadores, tales que deben ser válidas para cualquier velocidad del aeroplano (o para cualquier proyectil). Para llegar las relaciones similares aplicaremos nuestro sentido común, y de esta manera tendremos la expresión general de las transformaciones Galileanas para un espacio bidimensional:

$$\begin{array}{l}
 \text{Origen O, fijo y: } t = t' : (\text{Directa LT})_{\text{O}} : \begin{array}{l} x' = x - t.v.\cos\alpha \\ y' = y - t.v.\sin\alpha \\ v_{x'} = v_x - v.\cos\alpha \\ v_{y'} = v_y - v.\sin\alpha \end{array} \quad (\text{Inversa LT})_{\text{O}} : \begin{array}{l} x = x' + t.v.\cos\alpha \\ y = y' + t.v.\sin\alpha \\ v_x = v_{x'} + v.\cos\alpha \\ v_y = v_{y'} + v.\sin\alpha \end{array} \quad (5)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Origen O', fijo y: } t = t' : (\text{Directa LT})_{\text{O}'} : \begin{array}{l} x = x' + t.v.\cos\alpha \\ y = y' + t.v.\sin\alpha \\ v_x = v_{x'} + v.\cos\alpha \\ v_y = v_{y'} + v.\sin\alpha \end{array} \quad (\text{Inversa LT})_{\text{O}'} : \begin{array}{l} x' = x - t.v.\cos\alpha \\ y' = y - t.v.\sin\alpha \\ v_{x'} = v_x - v.\cos\alpha \\ v_{y'} = v_y - v.\sin\alpha \end{array} \quad (6)
 \end{array}$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la presentación del caso tridimensional, el ejemplo en la **Fig. 3a**, el cual es el modelo más usado en la derivación de las transformaciones galileanas, precisamente porque permite "fácilmente" el tomar de las asunciones galileanas como veremos cuando lleguemos la derivación de las transformaciones de Lorentz.

En esta configuración, los ejes X y X' coinciden a lo largo de la línea del movimiento relativo y los planos formado por los ejes YZ y por los ejes Y'Z' permanecen paralelos entre si. Cuando viniendo desde $-\infty$, el origen O' del sistema móvil coincide con el origen del sistema fijo O, para $t = t' = 0$, y ambos observadores están mirando el vuelo de un aeroplano no paralelo a ninguno de los ejes coordenados, el observador fijo en O mide a una componente x del desplazamiento del aeroplano, pero el observador móvil en O' mide una componente de tal desplazamiento igual a $x' = x - v.t$. Debido a el paralelismo de los ejes YZ y Y'Z', el valor de los coordenadas es igual para ambos observadores, $y = y'$ y $z = z'$ y el tiempo es "igual" para los observadores. De la geometría del problema, las transformaciones galileanas para este caso particular se convierten en:

$$\begin{array}{l}
 \text{Origen O, fijo y: } t = t' : (\text{Directa LT})_{\text{O}} : \begin{array}{l} x' = x - t.v.\cos\alpha \\ y' = y; \quad z' = z \\ v_{x'} = v_x - v.\cos\alpha \\ v_{y'} = v_y; \quad v_{z'} = v_z \end{array} \quad (\text{Inversa LT})_{\text{O}} : \begin{array}{l} x = x' + t.v.\cos\alpha \\ y = y'; \quad z = z' \\ v_x = v_{x'} + v.\cos\alpha \\ v_y = v_{y'}; \quad v_z = v_{z'} \end{array} \quad (7)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Origen } O', \text{ fijo y: } t = t' : \text{ (Directa LT)}_{O'}: \\
 \begin{array}{l}
 x = x' + t \cdot v \cdot \cos \alpha \\
 y = y'; \quad z = z' \\
 v_x = v_{x'} + v \cdot \cos \alpha \\
 v_y = v_{y'}; \quad v_z = v_{z'}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{(Inversa LT)}_{O'}: \\
 \begin{array}{l}
 x' = x - t \cdot v \cdot \cos \alpha \\
 y' = y; \quad z' = z \\
 v_{x'} = v_x - v \cdot \cos \alpha \\
 v_{y'} = v_y; \quad v_{z'} = v_z
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (8)$$

Las relaciones (8) son válidas si consideramos el sistema O' como fijo y el sistema O como móvil.

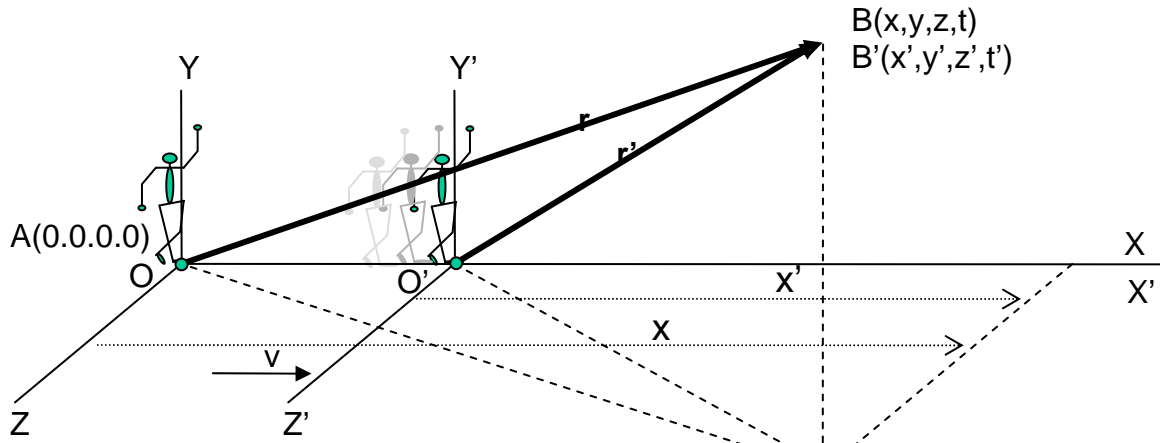
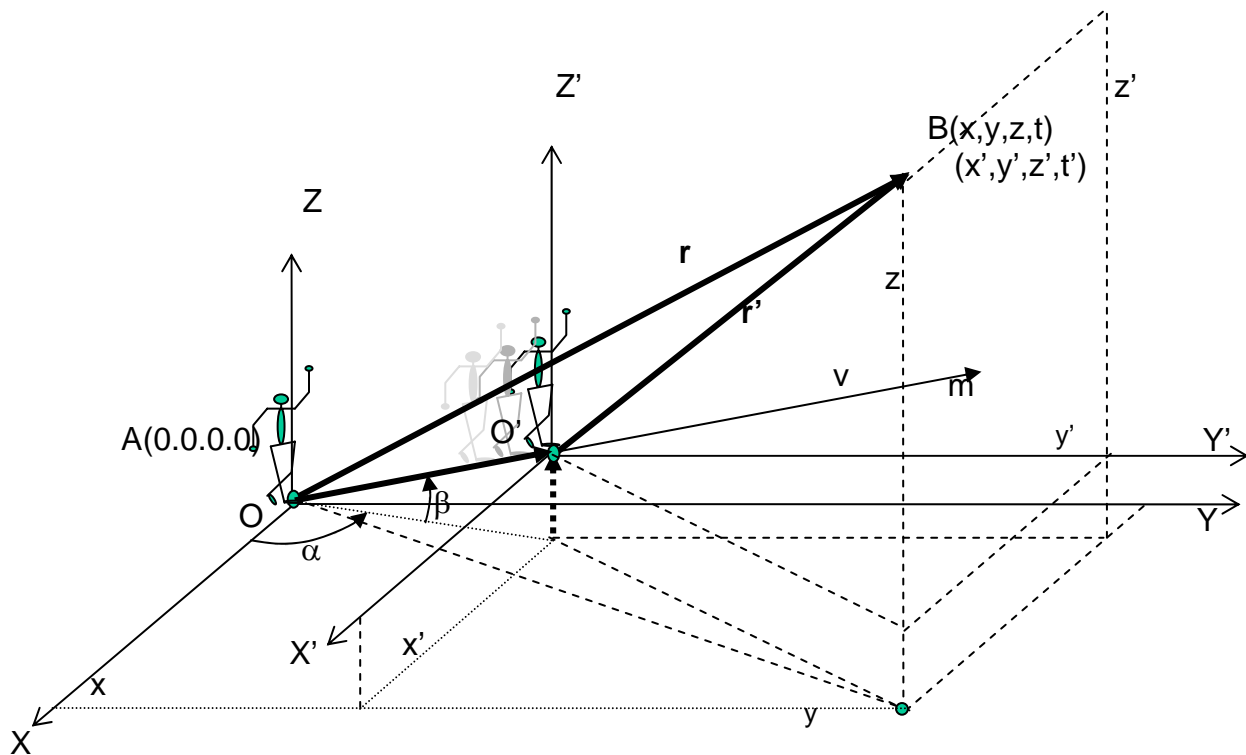


Fig. 3a



Ahora, representemos esta situación tridimensional de una manera más general, la cual se refiere a la Fig. 3b, donde los dos observadores, con el equipo para hacer medidas de longitud, de tiempo y de velocidades sobre los proyectiles móviles; el primero localizado en el origen de coordenadas de un sistema fijo O, y el segundo situado en el origen de coordenadas de un sistema móvil O'. El sistema O' se mueve en una velocidad constante v , respecto a O, pero ahora, a lo largo de una línea inclinada m tal que ambos observadores están situados sobre m . La línea inclinada forma un ángulo β con el plano XY y su proyección en este plano XY un ángulo α con el eje X.

En esta configuración, los ejes X y X' se mantienen paralelos a lo largo de la línea del movimiento relativo y los planos formados por los ejes YZ y por los ejes Y'Z' permanecen también paralelos entre sí, pero ninguno de los ejes son coincidentes excepto para $t = t' = 0$. Sea \mathbf{r} el radio-vector de un de un aeroplano en vuelo inclinado rectilíneo, medido por el observador en O y sea \mathbf{r}' el radio-vector mismo aeroplano, medido por el observador en O'. De esta manera, aplicando nuestro ya conocido sentido común, tendremos la expresión general de las transformaciones galileanas para un espacio tridimensional:

$$\begin{array}{l}
 \text{O, fijo y } t = t' : (\text{Directa LT})_{\text{O}} : \\
 \begin{array}{l}
 x' = x - t.v.\cos\alpha.\cos\beta \\
 y' = y - t.v.\sin\alpha.\cos\beta \\
 z' = z - t.v.\sin\beta \\
 v_{x'} = v_x - v.\cos\alpha.\cos\beta \\
 v_{y'} = v_y - v.\sin\alpha.\cos\beta \\
 v_{z'} = v_z - v.\sin\beta
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (\text{Inversa LT})_{\text{O}'} : \\
 \begin{array}{l}
 x = x' + t.v.\cos\alpha.\cos\beta \\
 y = y' + t.v.\sin\alpha.\cos\beta \\
 z = z' + t.v.\sin\beta \\
 v_x = v_{x'} + v.\cos\alpha.\cos\beta \\
 v_y = v_{y'} + v.\sin\alpha.\cos\beta \\
 v_z = v_{z'} + v.\sin\beta
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (9)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{O}', \text{ fijo y } t = t' : (\text{Directa LT})_{\text{O}'} : \\
 \begin{array}{l}
 x = x' + t.v.\cos\alpha.\cos\beta \\
 y = y' + t.v.\sin\alpha.\cos\beta \\
 z = z' + t.v.\sin\beta \\
 v_x = v_{x'} + v.\cos\alpha.\cos\beta \\
 v_y = v_{y'} + v.\sin\alpha.\cos\beta \\
 v_z = v_{z'} + v.\sin\beta
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (\text{Inversa LT})_{\text{O}} : \\
 \begin{array}{l}
 x' = x - t.v.\cos\alpha.\cos\beta \\
 y' = y - t.v.\sin\alpha.\cos\beta \\
 z' = z - t.v.\sin\beta \\
 v_{x'} = v_x - v.\cos\alpha.\cos\beta \\
 v_{y'} = v_y - v.\sin\alpha.\cos\beta \\
 v_{z'} = v_z - v.\sin\beta
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (10)$$

Las relaciones (10) son válidas si consideramos el sistema O' como fijo y el sistema O como móvil.

En las secciones siguientes derivaremos las transformaciones de Lorentz de la manera clásica y luego las obtendremos correctamente, sin asunciones, para comparar ambos resultados y discutir porqué el asumir, $y' = y$, $z' = z$, es erróneo y cómo afectan estas erróneas asunciones los conceptos en Física.

III. DERIVACIÓN CLÁSICA DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ (LT)

La discusión de los últimos siglos sobre un medio para transportar la luz es bien conocida y fue indudablemente clarificada por Einstein en su excelente trabajo de 2005 [1] con la conclusión de la no existencia del Éter, con la cual el autor de este trabajo está completamente de acuerdo. Esta discusión deviene fundamentalmente porque las transformaciones galileanas no eran compatibles ni

con la constancia de la velocidad de la luz, ni con las ecuaciones del Maxwell. Por ejemplo, de acuerdo con el análisis Galileano, un observador que se mueva a velocidad constante v , en el mismo sentido de la velocidad de un pulso de luz c enviado por la linterna de un observador fijo, deducirá que la velocidad del pulso de luz es $c - v$. Y si se mueve contrariamente deducirá que el pulso se aleja a una velocidad $c + v$. Es decir, para un análisis Galileano la velocidad de un pulso de luz depende del observador. En 1881 fue realizado el experimento de Michelson y Morley para medir la velocidad de la luz en diferentes direcciones con el claro y sorprendente resultado de que la velocidad de la luz era la misma en todas las direcciones. Como una explicación a este resultado devinieron las Transformaciones de Lorentz (LT).

Para la derivación de las LT son utilizados los postulados o las asunciones siguientes:

- 1) **Principio de la Relatividad:** "las leyes físicas deben ser las mismas en cualquier sistema inercial de referencia". Este principio fue primeramente enunciado explícitamente por Galileo Galilei en 1639 en su "Diálogo referente a los dos principales sistemas del mundo". Ahora se conoce como el principio de la relatividad de Einstein, aceptado universalmente.
- 2) **Invariancia de la velocidad de la luz:** "La velocidad de la luz en vacío es igual para todos los observadores inerciales, independientemente de la velocidad del cuerpo que la emite". Los últimos dos siglos esta constante universal se ha comprobado hasta el valor exacto actual siguiente: 299.792.458 metros por segundo.

Para derivar las LT, la mayoría de los autores utiliza la configuración particular de **Fig. 2a** (dos dimensiones) o de la **Fig. 3a** (tres dimensiones) las cuales no son configuraciones generales del movimiento relativo. Y puesto que, la línea del movimiento relativo que une el origen del sistema O con el origen del sistema O' coincide con los eje X y X' y es simultáneamente perpendicular a los planos formados por los ejes de Y y Z y los ejes Y' y Z', el "sentido común" y/o la "geometría o la simetría del problema" indican que los desplazamientos paralelos a estos ejes son consideradas iguales por los observadores en uno y en el otro sistema, es decir, "se podrá concluir que : $y' = y$ y $z' = z$ ". Este es básicamente el argumento clásico. En este sentido, presentaremos un procedimiento simple y directo que reasuma los diferentes métodos usados por otros autores desde 1904 hasta nuestros días, utilizando dichas asunciones.

Las transformaciones de Lorentz, tienen que ser válidas aún si el proyectil es un pulso de luz. En tal caso, para preservar la constancia de la velocidad de la luz, lo que se hace matemáticamente es introducir un factor k , a ser determinado dentro de las transformaciones Galileanas. Se debe recordar que, el proyectil, o el pulso de luz, que es disparado o enviado cuando ambos orígenes coinciden para $t' = t = 0$. Puesto que el tiempo medido por cada uno de los observadores podría no ser el mismo, podríamos asumir que ambos tiempos están relacionados como $t' = k.(t - a.x)$, donde a es otro factor que será determinado. Las transformaciones de Lorentz se reducirán a la transformación Galileana para $k = 1$ y $a = 0$. Así, el primer sistema siguiente de relaciones, similar a éstos en (3) y (4), se establece:

$$x' = k.(x - v.t) \quad (11)$$

$$y' = y \quad (12)$$

$$t' = k.(t - a.x) \quad (13)$$

La ecuación (11) es obtenida de **Fig. 2a** considerando que el sistema O es fijo y el sistema móvil O' viniendo desde. $-\infty$. Observe que la expresión (12), no proviene de ecuaciones sino del "sentido común". Así, obtengamos el valor de k , tomando el proyectil como un pulso de luz. En tal caso, la velocidad del pulso de luz, estará igual medida por ambos observadores:

$$x^2 + y^2 = c^2 \cdot t^2 \quad (14)$$

$$x'^2 + y'^2 = c^2 \cdot t'^2 \quad (15)$$

Haciendo substituciones de las expresiones (11) y (12) dentro de (13) y (15), tenemos:

$$k^2 \cdot (x^2 - 2 \cdot v \cdot x \cdot t + v^2 \cdot t^2) + y^2 = c^2 \cdot k^2 \cdot (t^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot t + a^2 \cdot x^2), \text{ o, de una manera ordenada:}$$

$$x^2 \cdot (k^2 - c^2 \cdot k^2 \cdot a^2) + 2 \cdot x \cdot t \cdot (k^2 \cdot v - a \cdot k^2 \cdot c^2) + y^2 = c^2 \cdot t^2 \cdot \left(k^2 - k^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (16)$$

Este resultado debe ser idéntico a la ecuación (14). Así,

$$\begin{aligned} k^2 - c^2 \cdot k^2 \cdot a^2 &= 1 \\ k^2 \cdot v - a \cdot k^2 \cdot c^2 &= 0 \\ k^2 - k^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} k &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ a &= \frac{v}{c^2} \end{aligned} \quad (17)$$

Así, tenemos finalmente el sistema de las transformaciones de Lorentz para dos dimensiones, como las hemos conocido por más de cientos años:

$$\begin{aligned} x' &= k(x - vt) & x &= k(x' + vt') \\ y' &= y & y &= y' \end{aligned} \quad (18)$$

Origen O, fijo and $t = t'$: (Directa LT) $_{\text{O}}$: $t' = k\left(t - \frac{v}{c^2} \cdot x\right)$ (Inversa LT) $_{\text{O}}$: $t = k\left(t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'\right)$

$$\begin{aligned} u_{x'} &= \frac{(u_x - v)}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot u_x} & u_x &= \frac{(u_{x'} + v)}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u_{x'}} \\ v_{y'} &= \frac{u_y}{k \cdot \left(1 - \frac{v}{c^2} \cdot u_x\right)} & v_{y'} &= \frac{u_{y'}}{k \cdot \left(1 + \frac{v}{c^2} \cdot u_{x'}\right)} \end{aligned}$$

Observe que las Transformaciones Inversas son obtenidas de las Directas LT. En efecto:

$$\begin{aligned} x' &= k(x - vt) \Rightarrow x = \frac{x'}{k} + vt \Rightarrow x = \frac{x'}{k} + v \cdot \left(\frac{t'}{k} + \frac{v}{c^2} \cdot x \right) \Rightarrow x = \frac{x' + vt'}{k \cdot (1 - v^2/c^2)} \Rightarrow x = k \cdot (x' + vt') \\ t' &= k \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} \cdot x \right) \Rightarrow t = \frac{t'}{k} + \frac{v}{c^2} \cdot x \Rightarrow t = \frac{t'}{k} + \frac{v}{c^2} \cdot \left(\frac{x'}{k} + vt \right) \Rightarrow t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'}{k \cdot (1 - v^2/c^2)} \Rightarrow t = k \cdot \left(t' + \frac{v}{c^2} \cdot x' \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Cambiando el rol de los observadores,

$$\begin{array}{ll}
 x = k(x' + v.t') & x' = k(x - v.t) \\
 y = y' & y' = y \\
 \text{Origen O, fijo y } t = t' : \text{ (Directa LT)}_{\circ}: t = k\left(t' + \frac{v}{c^2}.x'\right) & \text{(Inversa LT)}_{\circ}: t' = k\left(t - \frac{v}{c^2}.x\right) \quad (20) \\
 u_x = \frac{(u_{x'} + v)}{1 + \frac{v}{c^2}.u_{x'}} & u_{x'} = \frac{(u_x - v)}{1 - \frac{v}{c^2}.u_x} \\
 v_{y'} = \frac{u_{y'}}{k.\left(1 + \frac{v}{c^2}.u_{x'}\right)} & v_{y'} = \frac{u_y}{k.\left(1 - \frac{v}{c^2}.u_x\right)}
 \end{array}$$

Las Transformaciones Inversas en (19) las Directas (20) e inversamente, aunque tienen los mismos símbolos refieren a situaciones distintas.

Nota 1: Otra razón de hacer la asunción (13) es porque si fuera establecido O fijo y O' móvil la declaración lógica sería $y' = k.y$. Pero si es O' el considerado fijo y O el sistema móvil, la declaración lógica debe ser $y = k.y'$. Esto implicaría $k = 1$, y esta manera nos lleva de nuevo a las transformaciones Galileanas (!). Así, la única "solución" era asumir directamente $y' = y$.

Nota 2: En opinión del autor, la principal razón que obliga a otros autores a asumir erróneamente, $y' = y$ y $z' = z$, fue la de considerar como configuración básica para derivar la Transformaciones de Lorentz aquella con ambos ejes X y X' coincidentes (**Fig. 2a ó 3a**). Prácticamente, en toda la literatura al respecto, el tratamiento es similar al indicado.

El procedimiento para obtener el sistema para tres dimensiones de fig. 3a es similar el anterior, obteniendo las mismas soluciones y una más asunción: $z' = z$.

$$\begin{array}{ll}
 x' = k(x - v.t) & x = k(x' + v.t') \\
 y' = y; \quad z' = z & y = y' \\
 t' = k\left(t - \frac{v}{c^2}.x\right) & t = k\left(t' + \frac{v}{c^2}.x'\right) \\
 u_{x'} = \frac{(u_x - v)}{1 - \frac{v}{c^2}.u_x} & u_x = \frac{(u_{x'} + v)}{1 + \frac{v}{c^2}.u_{x'}} \quad (21) \\
 \text{Origen O, y and } t = t' : \text{ (Directa LT)}_{\circ}: & \text{(Inversa LT)}_{\circ}: \\
 u_{y'} = \frac{u_y}{k.\left(1 - \frac{v}{c^2}.u_x\right)} & v_{y'} = \frac{u_{y'}}{k.\left(1 + \frac{v}{c^2}.u_{x'}\right)} \\
 u_{z'} = \frac{u_z}{k.\left(1 - \frac{v}{c^2}.u_x\right)} & u_z = \frac{u_z}{k.\left(1 - \frac{v}{c^2}.u_{x'}\right)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x' = k(x - v.t) \\
 y' = y; \quad z' = z \\
 t' = k\left(t - \frac{v}{c^2}.x\right) \\
 u_{x'} = \frac{(u_x - v)}{1 - \frac{v}{c^2}.u_x}
 \end{array}
 \quad \text{(Direct LT)}_O:
 \quad \text{(Inverse LT)}_{O'}:
 \quad \begin{array}{l}
 x = k(x' + v.t') \\
 y = y' \\
 t = k\left(t' + \frac{v}{c^2}.x'\right) \\
 u_x = \frac{(u_{x'} + v)}{1 + \frac{v}{c^2}.u_{x'}}
 \end{array}
 \quad (22)$$

$$\begin{array}{l}
 u_{y'} = \frac{u_y}{k.\left(1 - \frac{v}{c^2}.u_x\right)} \\
 u_{z'} = \frac{u_z}{k.\left(1 - \frac{v}{c^2}.u_x\right)}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 v_{y'} = \frac{u_{y'}}{k.\left(1 + \frac{v}{c^2}.u_{x'}\right)} \\
 u_z = \frac{u_z}{k.\left(1 - \frac{v}{c^2}.u_{x'}\right)}
 \end{array}$$

IV. DERIVACIÓN CORRECTA DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ (1)

En lugar de utilizar la representación particular de la **Fig. 2a** o de la **Fig. 3a**, utilizaremos las configuraciones generales en las **Figs. 2b y/o 3b** como el punto correcto de partida para derivar las LT. Seguiremos la misma secuencia usada antes para dos y tres dimensiones.

Refiriéndonos al movimiento relativo en dos dimensiones ilustrado en la **Fig. 2b**, cuando el origen O' moviéndose a lo largo de una línea inclinada *m* a velocidad constante *v*, viniendo desde el lado izquierdo de *m*, coincide con el origen fijo O un pulso de luz es enviado en una dirección espacial cualquiera. Definiendo α , como el ángulo entre la línea del movimiento relativo, *m*, y el eje X, de la geometría de la **Fig. 2b**, se tienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{l}
 x^2 + y^2 = c^2.t^2 \\
 x'^2 + y'^2 = c^2.t'^2
 \end{array}
 \quad \text{para,}
 \quad \begin{array}{l}
 x' = k.(x - v.\cos \alpha.t) \\
 y' = k.(y + v.t.\sin \alpha)
 \end{array}
 \quad (23)$$

En base a estas relaciones, substituyendo, ordenando y agrupando convenientemente, obtenemos:

$$\begin{array}{l}
 c^2.t'^2 = k^2.[(x - v.\cos \alpha.t)^2 + (y + v.t.\sin \alpha)^2] \\
 c^2.t'^2 = k^2.[(x^2 + y^2) + v^2.t^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2.v.x.(t.\cos \alpha) - 2.v.y.(t.\sin \alpha)] \\
 c^2.t'^2 = k^2.[c^2.t^2 + v^2.t^2] - 2.v.x.(t.\cos \alpha) - 2.v.y.(t.\sin \alpha)
 \end{array}
 \quad (24)$$

Sustituyendo: $c^2.t'^2 \equiv c^2.t^2.(sin^2 \alpha + cos^2 \alpha)$, y $v^2.t^2 \equiv v^2.\frac{x^2 + y^2}{c^2}$; y agrupando, obtenemos:

$$\begin{array}{l}
 c^2.t'^2 = k^2.\{[c^2.(t.\cos \alpha)^2 - 2.v.x.(t.\cos \alpha) + v^2.\frac{x^2}{c^2}] + [c^2.(t.\sin \alpha)^2 - 2.v.y.(t.\sin \alpha) + v^2.\frac{y^2}{c^2}]\} \\
 c^2.t'^2 = k^2.[(c.t.\cos \alpha - \frac{v}{c}.x)^2 + (c.t.\sin \alpha - \frac{v}{c}.y)^2] = c^2.k^2.[(t.\cos \alpha - \frac{v}{c^2}.x)^2 + (t.\sin \alpha - \frac{v}{c^2}.y)^2]
 \end{array}$$

Sin asumir nada y dividir por c^2 la última relación, se obtiene la expresión siguiente para el tiempo:

$$t'^2 = k^2 \cdot \left[\left(t \cdot \cos \alpha - \frac{v}{c^2} \cdot x \right)^2 + \left(t \cdot \sin \alpha - \frac{v}{c^2} \cdot y \right)^2 \right] \tag{25}$$

Antes de continuar obtengamos el valor de k . De ecuaciones anteriores, y formando la identidad:

$$\begin{aligned} c^2 \cdot k^2 \cdot \left[\left(t \cdot \cos \alpha - \frac{v}{c^2} \cdot x \right)^2 + \left(t \cdot \sin \alpha - \frac{v}{c^2} \cdot y \right)^2 \right] &\equiv \\ &\equiv k^2 \cdot \left[(x^2 + y^2) + v^2 \cdot t^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2 \cdot v \cdot x \cdot (t \cdot \cos \alpha) - 2 \cdot v \cdot y \cdot (t \cdot \sin \alpha) \right] \end{aligned}$$

Simplificando y reordenando tenemos: $(c^2 \cdot k^2 - v^2 \cdot k^2) t^2 = \left(k^2 - \frac{k^2 \cdot v^2}{c^2} \right) x^2 + \left(k^2 - \frac{k^2 \cdot v^2}{c^2} \right) y^2$

Este resultado debe ser idéntico a: $c^2 \cdot t^2 = x^2 + y^2$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} c^2 \cdot k^2 - v^2 \cdot k^2 &= c^2 \\ k^2 - \frac{k^2 \cdot v^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \quad \text{Solving, we have:} \quad k^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{26}$$

Observando cuidadosamente el lado derecho de la expresión anterior, ello nos conduce a definir el tiempo como vector y la expresión (25) su magnitud. Así, como se sugiere, la expresión anterior se puede reorganizar para obtener la estructura vectorial del tiempo correspondiente, de la manera que a continuación se expone:

$$\mathbf{t}' = k \cdot \left[\left(t \cdot \cos \alpha - \frac{v}{c^2} \cdot x \right) \mathbf{i} + \left(t \cdot \sin \alpha - \frac{v}{c^2} \cdot y \right) \mathbf{j} \right] = k \cdot \left[t \cdot \cos \alpha \cdot \mathbf{i} - \frac{v}{c^2} \cdot x \cdot \mathbf{i} + t \cdot \sin \alpha \cdot \mathbf{j} - \frac{v}{c^2} \cdot y \cdot \mathbf{j} \right] \tag{27}$$

$$\mathbf{t}' = k \cdot \left[(t \cdot \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + t \cdot \sin \alpha \cdot \mathbf{j}) - \frac{v}{c^2} \cdot (x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}) \right] = k \cdot \left[(t_x \cdot \mathbf{i} + t_y \cdot \mathbf{j}) - \frac{v}{c^2} \cdot (x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j}) \right]$$

Así, definiendo: $\left\{ \begin{matrix} t_x = t \cdot \cos \alpha \\ t_y = t \cdot \sin \alpha \\ \mathbf{t} = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j} \end{matrix} \right\}$ y $\left\{ \begin{matrix} t'_x = k \cdot \left(t_x - \frac{v}{c^2} \cdot x \right) \\ t'_y = k \cdot \left(t_y - \frac{v}{c^2} \cdot y \right) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathbf{t}' = k \cdot \left(\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r} \right) \\ \mathbf{r}' = k \cdot (\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t}) \end{matrix} \right\}$ (28)

Puede observarse que esta estructura del vector del tiempo se puede obtener fácilmente para cualquier número de dimensiones repitiendo este mismo procedimiento. Por ejemplo: En el caso tridimensional, de la geometría de la **Fig. 3b**, las siguiente relaciones generales pueden ser deducidas y construidas:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot t^2 & \quad x' = k \cdot (x - v \cdot t \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta) & \quad t_x = t \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \\
 x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 \cdot t'^2 & \quad y' = k \cdot (y - v \cdot t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta) & \quad \text{y definiendo: } t_y = t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta \\
 & \quad z' = k \cdot (z - v \cdot t \cdot \sin \beta) & \quad t_z = t \sin \beta
 \end{aligned} \tag{29}$$

Se obtiene otra vez (siguiendo un procedimiento similar al usado previamente) la expresión ya familiar de la estructura del vector del tiempo, para tres (o para cualquier número de) dimensiones:

$$\begin{aligned}
 t'^2 = k^2 \cdot \left[\left(t_x - \frac{v}{c^2} \cdot x \right)^2 + \left(t_y - \frac{v}{c^2} \cdot y \right)^2 + \left(t_z - \frac{v}{c^2} \cdot z \right)^2 \right] & \Rightarrow \mathbf{t}' = k \cdot \left(\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r} \right) \\
 & \mathbf{r}' = k \cdot (\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t})
 \end{aligned} \tag{30}$$

Todos estos resultados conducen constantemente para considerar el comportamiento del tiempo como vector cuando es referido a observadores situados en sistemas inerciales con movimiento relativo entre ellos. Encontremos la expresión \mathbf{t} y \mathbf{r} en de la función de \mathbf{t}' y \mathbf{r}' o de sus transformaciones inversas manipulando las expresiones de las VLT dentro de (30):

$$\mathbf{r}' = k \cdot (\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t}) \Rightarrow \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'}{k} + v \cdot \mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}'}{k} + v \cdot \left(\frac{\mathbf{t}'}{k} + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r} \right) \Rightarrow \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}' + v \cdot \mathbf{t}'}{k \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}$$

$$\mathbf{t}' = k \cdot \left(\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r} \right) \Rightarrow \mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}'}{k} + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}'}{k} + \frac{v}{c^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{k} + v \cdot \mathbf{t} \right) \Rightarrow \mathbf{t} = \frac{\mathbf{t}' + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}'}{k \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}$$

Para $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, tenemos las Transformaciones Inversas:
$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{r} &= k \cdot (\mathbf{r}' + v \cdot \mathbf{t}') \\ \mathbf{t} &= k \cdot \left(\mathbf{t}' + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}' \right) \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

El valor de k también se obtiene fácilmente de las expresiones obtenidas de los radio-vectores medidos por cada observador, considerando el sistema O fijo, y O' como el móvil, es decir:

$\mathbf{r}' = k \cdot (\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t})$ y $\mathbf{r} = k \cdot (\mathbf{r}' + v \cdot \mathbf{t}')$. De hecho, substituyendo $\mathbf{t}' = \frac{\mathbf{r}'}{c}$ y $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}}{c}$ en las mismas obtenemos:

$$\mathbf{r}' = k \cdot \left(\mathbf{r} - v \cdot \frac{\mathbf{r}}{c} \right) = k \cdot \mathbf{r} \cdot \left(1 - \frac{v}{c} \right)$$

$$\mathbf{r} = k \cdot \left(\mathbf{r}' + v \cdot \frac{\mathbf{r}'}{c} \right) = k \cdot \mathbf{r}' \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

Y multiplicándose uno a uno, conseguimos:

$$\mathbf{r}' \bullet \mathbf{r} = k^2 \cdot \mathbf{r} \bullet \mathbf{r}' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La no variación del intervalo del espacio-tiempo de la teoría especial de la relatividad, expresada como: $c^2 \cdot t'^2 - r'^2 = c^2 \cdot t^2 - r^2$, es también preservada en este análisis para cualquier número de dimensiones. Esto significa que las LT corregidas son también válidas no solamente para la luz sino para cualquier proyectil, como se esperaba. Seguidamente presentamos la demostración. Trabajando con componentes n-dimensionales la expresión, $c^2 \cdot t'^2 - r'^2$, obtendremos:

$$\begin{aligned} c^2 \cdot t'^2 - r'^2 &= \sum_{j=1}^N c^2 \cdot k^2 \cdot \left(t_j - \frac{v}{c} \cdot x_j \right)^2 - k^2 \cdot \sum_{j=1}^N (x_j - v \cdot t_j)^2 = k^2 \cdot \sum_{j=1}^N \left[\left(c \cdot t_j - \frac{v}{c} \cdot x_j \right)^2 - (x_j - v \cdot t_j)^2 \right] = \\ &= k^2 \cdot \sum_{j=1}^N \left[\left(c^2 \cdot t_j^2 - 2 \cdot v \cdot t_j \cdot x_j + \frac{v^2}{c^2} \cdot x_j^2 \right) - (x_j^2 - 2 \cdot v \cdot t_j \cdot x_j + v^2 \cdot t_j^2) \right] = k^2 \cdot \sum_{j=1}^N \left[c^2 \cdot t_j^2 + \frac{v^2}{c^2} \cdot x_j^2 - x_j^2 - v^2 \cdot t_j^2 \right] \\ &= k^2 \cdot \sum_{j=1}^N \left[c^2 \cdot t_j^2 + \frac{v^2}{c^2} \cdot x_j^2 - x_j^2 - v^2 \cdot t_j^2 \right] = k^2 \cdot \sum_{j=1}^N \left[c^2 \cdot t_j^2 - v^2 \cdot t_j^2 + \frac{v^2}{c^2} \cdot x_j^2 - x_j^2 \right] = \\ &= k^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^N (c^2 \cdot t_j^2 - x_j^2) = \sum_{j=1}^N (c^2 \cdot t_j^2 - x_j^2) = \sum_{j=1}^N (c^2 \cdot t_j^2) - \sum_{j=1}^N (x_j^2) = c^2 \cdot \sum_{j=1}^N t_j^2 - \sum_{j=1}^N x_j^2 \end{aligned}$$

La última expresión es precisamente la expresión que buscábamos: $c^2 \cdot t^2 - r^2$.

Este procedimiento demuestra que el carácter del vector del tiempo no es el resultado de ninguna hipótesis; él deviene directamente de observar las características vectoriales del tiempo, claramente presentes en las transformaciones que relacionan las medidas hecha por ambos observadores inerciales. Puede también ser observado, desde un punto de vista epistemológico, que el tiempo como vector espacial forma su dirección tomándola del vector velocidad del sistema móvil O', dejando tal parámetro con un carácter escalar y funcionando como parte de un factor de escalamiento. Este comportamiento de la velocidad puede ser entendido debido a que ambos observadores están en la misma línea inclinada, y respecto de ellos su valor es unidimensional, es decir positivo o negativo, lo cual implicaría este carácter escalar de v .

Otra característica epistemológica del vector tiempo es su dependencia de las coordenadas espaciales x , y and z , lo cuál significa **que no es un vector independiente**, adicional a las tres dimensiones de nuestro, una característica que es notable porque difiere del universo de las cuatro dimensiones de Minkowski (el tiempo como una cuarta dimensión independiente) introducido por Einstein en sus teorías especial y general de la relatividad. Si el análisis que estamos siguiendo es correcto, y no son necesarias cuatro dimensiones para entender nuestro universo, ello significaría que para obtener resultados exactos deberíamos seguir trabajando dentro de nuestras tres dimensiones espaciales, y que las magnitudes pueden continuar siendo definidas como en la física vectorial, pero desde un punto de vista moderno y relativista. Observando los resultados obtenidos en este estudio llegaríamos el concepto siguiente del tiempo: Se fuerza la hora de comportarse como vector con las componentes espaciales en cada coordenada, cuando aparece dentro de un

análisis sin las asunciones que vamos ahora a nombrar encendido, las transformaciones vectoriales de Lorentz (VLT por sus siglas en inglés), pero puede aparecer comportándose como valor escalar cuando no es un elemento de una transformación tal como VLT, de la forma como la hemos conocido siempre: como un medidor secuencial de eventos. Pero por otra parte, el tiempo puede también ser considerado como un vector de la manera natural como fue tratado por Hongbao Ma De acuerdo con su idea y ella se aplica perfectamente a nuestro trabajo, Hongbao Ma dice: "este concepto tridimensional del tiempo se obtiene del concepto matemático más bien que de su existencia ontológica. Los resultados matemáticos están al nivel epistemológico" [4]. Vale para mencionar que una presentación similar y rigurosa del tiempo como vector, muy cerca de la manera que hemos presentado aquí se puede considerar en el trabajo hecho por Bernard Guy [5], publicado en 2001.

V. DERIVACIÓN CORRECTA DE LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ (2)

Bajo la consideración del tiempo con todas las propiedades de un vector dependiente de las coordenadas espaciales, y contemplándolo dentro de la relación entre observadores inerciales con movimiento relativo, se obtendrá formalmente la derivación vectorial de las transformaciones de Lorentz (VLT). Así, ahora nos referiremos en general al caso tridimensional, donde el sistema móvil O' se desplaza sobre una línea inclinada general respecto a un punto fijo de la misma donde se encuentra el origen fijo O. Cada observador mide un radio-vector del pulso de luz \mathbf{r}, \mathbf{r}' , y un tiempo vectorial \mathbf{t}, \mathbf{t}' . Los vectores, en lo adelante, serán escritos en negrilla. Las relaciones en VLT, derivadas previamente, se obtienen ahora más directamente de la **Fig. 3b**:

$$\mathbf{r} = c.\mathbf{t} \quad \mathbf{r}' = c.\mathbf{t}' \quad \mathbf{t}' = \frac{\mathbf{r}'}{c} \quad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}}{c}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}' = k(\mathbf{r} - v.\mathbf{t}) \Rightarrow c.\mathbf{t}' = k.\mathbf{t}.(c - v) \\ \mathbf{r} = k(\mathbf{r}' + v.\mathbf{t}') \Rightarrow c.\mathbf{t} = k.\mathbf{t}'.(c + v) \end{array} \right\} \Rightarrow c^2.\mathbf{t} \bullet \mathbf{t}' = k^2.\mathbf{t}' \bullet \mathbf{t}.(c^2 - v^2) \Rightarrow k^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - v.\mathbf{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow c.\mathbf{t}' = \frac{c.\mathbf{t} - v.\frac{\mathbf{r}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \mathbf{t}' = \frac{\mathbf{t} - \frac{v}{c^2}.\mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r} - v.d\mathbf{t}}{\left| dt - \frac{v}{c^2}.d\mathbf{r} \right|} \tag{33}$$

Hemos visto previamente que la igualdad siguiente también se mantiene invariante en las VLT: $c^2.t'^2 - r'^2 = c^2.t^2 - r^2$. Esto significa que las VLT cinemáticas, compuestas por expresiones \mathbf{r}' , \mathbf{t}' and \mathbf{u}' , en (27), son generalmente válidas para un pulso de luz o para cualquier proyectil que se mueva a cualquier velocidad menor que la de la luz, c . Como comprobación, el Jacobiano para cualquier conjunto de componentes, llega a ser simétrica e igual a la unidad, es decir, siendo x^j las

componentes medidas por O, y \bar{x}^j , identificadas con la barra, las componentes medidas por O', para $i, j = 1, 2, 3$, y para $k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}' = k \cdot (\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t}) \\ \mathbf{t}' = k \cdot \left(\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r} \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = k \cdot (\mathbf{r}' + v \cdot \mathbf{t}') \\ \mathbf{t} = k \cdot \left(\mathbf{t}' + \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}' \right) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right) = \begin{vmatrix} k & -k \cdot v \\ -k \cdot \frac{v}{c^2} & k \end{vmatrix} \\ \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \right) = \begin{vmatrix} k & +k \cdot v \\ +k \cdot \frac{v}{c^2} & k \end{vmatrix} \end{array} \right\} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right) = \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \right) = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$$

Una observación final en el procedimiento presentado previamente: No fue hecha ninguna asunción. Así, debido a que éstas son relaciones vectoriales, ellas son válidas en general. Es oportuno señalar que las VLT son realmente consistentes con las ecuaciones del Maxwell. Ello es también demostrado en el anexo A, seguidamente a esta sección.

Construyamos las expresiones generales de las componentes de las Transformaciones corregidas de Lorentz o VLT, en tres dimensiones en coordenadas esféricas (**Fig. 3b**) en base a las relaciones ya obtenidas que aparecen en (24) (25), donde β es el ángulo entre la trayectoria inclinada de O' y el plano XY; y α el ángulo formado por la proyección de la trayectoria inclinada de O' en el plano XY, con el eje X. Cuando coincide el origen móvil O' y el origen fijo O, un pulso de luz es enviado hacia el espacio cuyas componentes genéricas son x, y, z . Las VLT generales del vector tiempo y el del radio-vector del pulso de luz (o de algún proyectil), en tres dimensiones, llegan a ser las siguientes:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - v \cdot t \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & x' &= \frac{x - v \cdot t_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= \frac{y - v \cdot t \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \Rightarrow \quad t_x &= t \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \\ & & t_y &= t \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha & \Rightarrow \quad y' &= \frac{y - v \cdot t_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ & & t_z &= t \sin \beta & & \\ z' &= \frac{z - v \cdot t \cdot \sin \beta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & z' &= \frac{z - v \cdot t_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{34}$$

$$t' = \frac{\left| \mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r} \right|}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{\left(t_x - \frac{v}{c^2} \cdot x \right)^2 + \left(t_y - \frac{v}{c^2} \cdot y \right)^2 + \left(t_z - \frac{v}{c^2} \cdot z \right)^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{35}$$

Las expresiones generales para **las velocidades** del pulso de luz o cualquier proyectil son obtenidas a partir de las anteriores expresiones (28) y (29)

$$\begin{aligned}
 u'_x &= \frac{u_x - v \cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{\left(\cos \alpha \cos \beta - \frac{v u_x}{c^2}\right)^2 + \left(\sin \alpha \cos \beta - \frac{v u_y}{c^2}\right)^2 + \left(\sin \beta - \frac{v u_z}{c^2}\right)^2}} \\
 u'_y &= \frac{u_y - v \sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{\left(\cos \alpha \cos \beta - \frac{v u_x}{c^2}\right)^2 + \left(\sin \alpha \cos \beta - \frac{v u_y}{c^2}\right)^2 + \left(\sin \beta - \frac{v u_z}{c^2}\right)^2}} \\
 u'_z &= \frac{u_z - v \sin \beta}{\sqrt{\left(\cos \alpha \cos \beta - \frac{v u_x}{c^2}\right)^2 + \left(\sin \alpha \cos \beta - \frac{v u_y}{c^2}\right)^2 + \left(\sin \beta - \frac{v u_z}{c^2}\right)^2}}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Particularicemos estos resultados generales a las condiciones de donde obtuvieron las LT originales (**Fig. 3a**). Re-estableciendo tales condiciones, i.e.: que el sistema O' se mueva a lo largo del eje X, es decir, $\alpha=\beta=0$, y el pulso de luz sea enviado al espacio, obtendremos la versión VLT de las transformaciones originales de Lorentz. Haciendo lo indicado obtenemos:

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = \frac{y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad z' = \frac{z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 t_x &= t \\
 t_y &= 0 \\
 t_z &= 0
 \end{aligned} \quad t' = \sqrt{\frac{\left(t_x - \frac{v}{c^2} \cdot x\right)^2 + \left(\frac{v}{c^2} \cdot y\right)^2 + \left(\frac{v}{c^2} \cdot z\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 u'_x &= \frac{u_x - v}{\sqrt{\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v u_y}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v u_z}{c^2}\right)^2}} \\
 u'_y &= \frac{u_y}{\sqrt{\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v u_y}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v u_z}{c^2}\right)^2}} \\
 u'_z &= \frac{u_z}{\sqrt{\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v u_y}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v u_z}{c^2}\right)^2}}
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = c^2$$

Comprobemos la última relación de las expresiones (38), que sería válido solamente para el pulso de luz. Tal ecuación establece que la velocidad de la luz medida por cualesquiera de los dos observadores deba ser igual, c (En general, para cualquier otro proyectil que no sea un pulso de luz, $u'^2 \neq u^2$), i. e., en base de qué O mide, $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = c^2$, entonces O' medirá:

$$\begin{aligned}
 u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2 &= \frac{(u_x - v)^2 + u_y^2 + u_z^2}{\left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v u_y}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{v u_z}{c^2}\right)^2} = \frac{u_x^2 - 2 v u_x + v^2 + u_y^2 + u_z^2}{1 - \frac{2 v u_x}{c^2} + \frac{v^2 u_x^2}{c^4} + \frac{v^2 u_y^2}{c^4} + \frac{v^2 u_z^2}{c^4}} = \\
 &= \frac{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) - 2 v u_x + v^2}{1 - \frac{2 v u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2 - 2 v u_x + v^2}{1 - \frac{2 v u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2 \left(1 - \frac{2 v u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{2 v u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}} = c^2
 \end{aligned}$$

Y usando las ecuaciones particularizadas en (31) para las LT, la demostración de la invariancia del intervalo del espacio-tiempo así llamado por Einstein se logra igualmente de una manera directa:

$$\begin{aligned}
 r'^2 - c^2 t'^2 &= \frac{(x - v t)^2 + y^2 + z^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - c^2 \frac{\left(t - \frac{v}{c^2} x\right)^2 + \left(\frac{v}{c^2} y\right)^2 + \left(\frac{v}{c^2} z\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\
 r'^2 - c^2 t'^2 &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2 v t x + v^2 t^2 - c^2 t^2 + 2 v t x - \frac{v^2}{c^2} (x^2 + y^2 + z^2)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} =
 \end{aligned}$$

Reordenando y simplificando, obtenemos

$$r'^2 - c^2 t'^2 = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] - \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] c^2 t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = r^2 - c^2 t^2$$

Comparando (31) y (32), con las ecuaciones características de LT, repetidas en (33) y (34):

$$x' = \frac{x - v t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \boxed{y' = y \quad z' = z} \quad t' = \frac{t - \frac{v x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t \frac{1 - \frac{v}{c^2} u_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{33}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \quad \boxed{u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}} \tag{34}$$

El primer aspecto que reconocemos en las ecuaciones (31) es que las componentes y, z , medidas por el observador fijo son diferentes a las y', z' , medidas por el observador móvil, revelando así

que las "asunciones" hechas en las LT originales son erróneas. Así, podemos observar que la expresión VLT del tiempo en (31) es totalmente diferente a la de LT en (33). Y por supuesto, las expresiones obtenidas, según este trabajo, para las componentes de la velocidad u'_x , u'_y , u'_z en las ecuaciones (32), son también diferentes de las presentadas por las LT en (34).

VI. CONCLUSION

- 1) Dado ese nuestro procedimiento para obtener las transformaciones modificadas de Lorentz, nombradas por nosotros como transformaciones vectoriales de Lorentz (VLT) no asume que eso y los coordenadas transforme de una manera Galileana, demuestra suficientemente que en la derivación clásica de las transformaciones de Lorentz (LT) eran innecesarias e incorrectas. Por lo tanto, reducen al LT clásico para ser solamente válido para un espacio unidimensional, donde no están necesarias las asunciones. Así pues, su validez no se debe extrapolar a una configuración general. Esto significa que las transformaciones de Lorentz como hemos sabido hasta este momento son erróneas cuando están aplicadas a nuestro espacio tridimensional, y en general, ellas son erróneas cuando están aplicadas a los espacios con más de una dimensión.
- 2) Si consideramos las transformaciones de Lorentz como parte central de la teoría especial de la relatividad (STR), como era considerada por Einstein adentro [3], entonces el STR debe también ser corregido pues era LT en este trabajo.
- 3) Dado que el tiempo tiene de hecho características del vector, en este trabajo hemos demostrado que son las de un vector dependiendo de los coordenadas espaciales. Esto significa que tiempo pues un vector no es perpendicular a los coordenadas espaciales o no es pronto un vector independiente. Por lo tanto, la consideración que el tiempo constituye una dimensión adicional a nuestro el universo de tres dimensiones es una declaración incorrecta.
- 4) El hecho de que el tiempo no se comporta pues un vector independiente (no es perpendicular a las ejes espaciales) implica no solamente que la Teoría Especial de la Relatividad (basada en el espacio de cuatro dimensiones de Minkowsky) sería una teoría incorrecta en la física, sino que, debido a esta misma razón, debería serlo también la Teoría General de la relatividad (GTR), ambas teorías de Einstein.

Comentario: Es concebible que cuando en Einstein 1905 estableció su famoso concepto de la variación de la masa con su velocidad [1], cuya expresión ha sido demostrado ser también incorrecta [3] él buscaba realmente la variación uno a uno de las magnitudes físicas entre la física clásica y la relativista a través de los factores de Lorentz. En esta misma edición del JVR hay otro trabajo en el cual se corrigen los factores de Lorentz usados en SRT. En una opinión especulativa del autor del presente trabajo, establece que de la misma forma como Einstein desechó la definición longitudinal de la masa relativista (erróneamente [3]) sin ninguna explicación, él parece abandonar de alguna manera, más adelante la Teoría Especial de la Relatividad (SRT) debido a algunas inconsistencias y limitaciones que él observó dentro de las Transformaciones de Lorentz (LT), y podría ser haber sido ésta una de las razones que él tuvo para desarrollar la Teoría General de la Relatividad (GRT), con lo cual intentó evitar tal tipo de limitaciones en su investigación.

REFERENCIAS

- [1] Albert Einstein. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 17, 1905, pp. 891-921. English version. *On the Electrodynamics of Moving Bodies*. <http://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/www/>
- [2] H. A. Lorentz. "[*Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light*](#)" Proc. Acad. Sci. of Amsterdam, **6**, 1904.
- [3] J A Franco R, [*Vectorial Lorentz Transformations*](#). 2006. EJTP 9 (2006) 35-64..
- [4] Hongbao Ma. [*The Nature of Time and Space*](#) Nature and Science 1 (1) November 2003. Page 8, section 18.
- [5] Guy B. *The Duality of Space and Time and the Theory of Relativity*. HADRONIC JOURNAL SUPPLEMENT 16, 369-412 (2001). Hadronic Press Inc., Palm Harbor FL 34682, USA.

ANNEX A

SOBRE LA CONSISTENCIA DE LAS TRANSFORMACIONES VECTORIALES DE LORENTZ (VLT) Y LA INCONSISTENCIA OF TRANSFORMACIONES DE LORENTZ (LT)

Dado que estamos trabajando con vectores, obtendremos una presentación de la ecuación de onda en función del radio-vector de posición del puso de luz y del vector tiempo. Recordando que:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r};$$

Así, desarrollando las derivadas de las componentes x , y , z en función del radio r y del tiempo t , obtendremos cada una de las componentes del operador ∇ , representadas como dependiendo de ambos vectores.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z}; \quad \text{Donde,} \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$$

Así, el operador $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ queda expresado como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{z}{r} \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \nabla \bullet \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

Así, la ecuación de onda se puede simplificar, solo como función de r y t :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = 0; \quad \text{For: } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r} - v \cdot \mathbf{t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{\partial r'}{\partial t} = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \frac{\partial r'}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \mathbf{t}' = \frac{\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{\partial t'}{\partial r} = \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \end{array} \right.$$

Aplicando la regla de cadena para la derivación parcial, respecto a las variables r, t :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial r} \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

Substituyendo valores obtenidos previamente

$$\therefore \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r'} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r'} \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

Diferenciando de nuevo, para formar todas las componentes cuadráticas requeridas de la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r'^2} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t'^2} - 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r' \partial t'} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(v^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r'^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t'^2} - 2 \cdot v \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r' \partial t'} \right)$$

Y substituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación de onda, finalmente tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} &= \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r'^2} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t'^2} - 2 \frac{v}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r' \partial t'} \right) - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(v^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r'^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t'^2} - 2 \cdot v \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r' \partial t'} \right) \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t'^2}$

De esta manera se demuestra que las VLT son consistentes con la ecuación de onda, las cuales provienen de las ecuaciones del Maxwell. Así pues, la ecuación de onda expresada bajo las VLT tiene la misma presentación para uno y otro observador, independientemente de la trayectoria del observador móvil y también independientemente de la dirección del pulso de luz, satisfaciendo en tal forma los postulados relativistas de Einstein y siendo consistente con ecuaciones del Maxwell.

El problema que las LT tienen, según nuestro desarrollo, es precisamente que las asunciones:

$y' = y$ y $z' = z$ que originan $\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}$, no permiten un tratamiento vectorial con

las variables r, t . Por ejemplo, en dos dimensiones, según Lorentz, el desplazamiento de la luz medida por el observador fijo en O, viene dado por $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, y la hecha por el observador móvil en O' es

:

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \frac{-vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{i}.$$

Observando cuidadosamente esta última ecuación, concluimos que no es posible obtener una expresión explícita de \mathbf{r}' como función de \mathbf{r} y \mathbf{t} . Así, no puede ser posible obtener una expresión

para $\frac{\partial r'}{\partial r}$, ni para $\frac{\partial t'}{\partial r}$.

Esta circunstancia implica que no podemos continuar con el procedimiento de construir la versión vectorial de las LT originales. Seguidamente demostraremos que las LT no son realmente invariantes a la ecuación de onda. Aunque en algunos libros aparece una "demostración" de la consistencia de las LT con la ecuación de onda, ésta no es absolutamente general; realmente es una demostración que es válida solamente para el caso particular de una dimensión: la del eje X, donde las asunciones no son necesarias. El ejemplo elegido para tal demostración se presenta siempre sin ninguna variación: un observador en el origen del sistema móvil O', que se mueve en el eje X y un pulso de luz es enviado al a lo largo del eje X, cuando coincide con el origen O en $t = t' = 0$. Por ejemplo, si se cambia esta presentación, estableciendo que el pulso de luz va paralelo al eje de Z, manteniendo al observador moviéndose sobre el eje X, y al observador fijo en el origen O, la "demostración" falla, como veremos. Para demostrarlo, resolveremos un ejemplo conocido tomado de la teoría electromagnética básica:

A) Una onda plana electromagnética se mueve a lo largo del eje Z a la velocidad de la luz, $z = ct$, tales que el campo eléctrico en eje de Y, $\varepsilon_y = \varepsilon_o \cdot \sin k \cdot (z - ct)$, depende solamente de la coordenada Z y el tiempo. Así pues, las características del campo serán: $\varepsilon_x = 0$; $\varepsilon_y = \varepsilon_y(z, t)$; $\varepsilon_z = 0$; $x = y = 0$. Suponga que el sistema O' se está moviendo a lo largo del eje X con una velocidad v y asumamos, $z' = z$, para estar bajo mismas premisas de las LT.

Las relaciones que aplican para este caso, según las LT, son

:

$$x' = \frac{-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad x=0; \quad y'=y=0; \quad z'=z; \quad t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = 0$$

Con estas premisas podremos escribir: $\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} = 0$, y similarmente, $\frac{\partial y'}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial t'}{\partial z} = 0$; Dado que

el tiempo no es una variable explícita en la expresión de z' , entonces $\frac{\partial z'}{\partial t} = 0$; Pero, puesto que

$z' = z$, $\frac{\partial z'}{\partial z} = 1$. De esta manera, todas las ecuaciones que corresponden a la ecuación de onda en

función de las componentes se reducen a:

:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial t^2} = 0$$

Intentemos construir la ecuación de onda bajo variables primas. Usando la regla de cadena:

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z'} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z'^2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x'^2} \frac{\partial x'^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial t'^2} \frac{\partial t'^2}{\partial t^2} - 2 \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x' \partial t'} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial t} \right]$$

Sustituyendo por sus valores, obtenemos:

:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \left(v^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial t'^2} - 2.v. \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x' \partial t'} \right) \text{ Introduciendo estos resultados, se obtiene una}$$

presentación diferente de la ecuación de onda para las variables primas: contrario a lo que se espera:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(v^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial t'^2} - 2.v. \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x' \partial t'} \right)$$

Este resultado demuestra cómo las LT originales no son realmente consistentes con las ecuaciones del Maxwell, porque la estructura de la ecuación de onda no es preservada.

B) Hagamos el mismo trabajo pero con las VLT. Expresando el movimiento de O' y el del pulso de luz en una forma vectorial, conseguimos:

$$\alpha = \beta = x = y = t_y = t_z = 0; \Rightarrow \mathbf{t} = t.\mathbf{i}; \quad \mathbf{r} = z.\mathbf{k} \Rightarrow z = r; \quad \text{By applying: } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{t}' = k. \left(\mathbf{t} - \frac{v}{c^2} . \mathbf{r} \right) \\ \mathbf{r}' = k. (\mathbf{r} - v.\mathbf{t}) \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{t}' = \frac{t.\mathbf{i} - \frac{v}{c^2} . r.\mathbf{k}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{r}' = \frac{r.\mathbf{k} - v.t.\mathbf{i}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{\partial t'}{\partial r} = \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{\partial r'}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{\partial r'}{\partial t} = \frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right\}$$

La Ecuación de onda, en la función de r, t llega a ser: $\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial t^2} = 0$. Operando como antes, y substituyendo valores, la ecuación de onda con primas se obtiene consistentemente:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r'^2} \frac{\partial r'^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t'^2} \frac{\partial t'^2}{\partial t^2} - 2. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r' \partial t'} \frac{\partial r' \partial t'}{\partial r^2} \right] - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r'^2} \frac{\partial r'^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t'^2} \frac{\partial t'^2}{\partial t^2} - 2. \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r' \partial t'} \frac{\partial r' \partial t'}{\partial t^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t'^2}$$

Justo lo que queríamos demostrar. Esto también significa que las VLT son verdaderamente consistentes con la ecuación de onda y en general con ecuaciones del Maxwell y no así las LT.